А.П. Рябушко Т.А. Жур

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Теория и задачи

Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов
учреждений высшего образования
по техническим специальностям

В пяти частях

Часть 4

**Криволинейные интегралы.
Элементы теории поля.
Функции комплексной переменной**

Минск
«Вышэйшая школа»
2017

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
Р98

Р е ц е н з е н т ы: кафедра высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники» (заведующий кафедрой доктор физико-математических наук, профессор *В.В. Цегельник*); заведующий кафедрой теории функций Белорусского государственного университета доктор физико-математических наук, профессор *В.Г. Кротов*

Все права на данное издание защищены. Воспроизведение всей книги или любой ее части не может быть осуществлено без разрешения издательства.

Рябушко, А. П.

Р98 Высшая математика : теория и задачи : учеб. пособие. В 5 ч. Ч. 4. Криволинейные интегралы. Элементы теории поля. Функции комплексной переменной / А. П. Рябушко, Т. А. Жур. – Минск : Вышэйшая школа, 2017. – 255 с. : ил.

ISBN 978-985-06-2814-5.

Это четвертая часть комплекса учебных пособий по высшей математике, направленных на развитие и активизацию самостоятельной, творческой работы студентов технических университетов. Содержатся необходимые теоретические сведения, наборы задач для аудиторных и индивидуальных домашних заданий, контрольных работ.

Для студентов учреждений высшего образования по техническим специальностям. Будет полезно студентам экономических специальностей, а также преподавателям учреждений высшего и среднего специального образования.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-06-2814-5(ч. 4)
ISBN 978-985-06-2764-3

© Рябушко А.П., Жур Т.А., 2017
© Оформление. УП «Издательство “Вышэйшая школа”», 2017

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый вниманию читателя комплекс учебных пособий под общим названием «Высшая математика: теория и задачи» в пяти частях содержит в своей основе существенно переработанный и дополненный материал неоднократно переиздававшегося комплекса учебных пособий «Индивидуальные задания по высшей математике» в четырех частях коллектива авторов под общей редакцией доктора физико-математических наук, профессора А.П. Рябушко (Минск, издательство «Вышэйшая школа»).

В новом комплексе многие задачи заменены более удачными, добавлено несколько сот новых задач, увеличено количество аудиторных занятий (АЗ), индивидуальных домашних заданий (ИДЗ), блочных контрольных работ (БКР), дополнительных задач к каждой главе, среди которых имеются задачи уровня НИРС (научно-исследовательская работа студентов). Номера этих задач помечены звездочкой. Во всех АЗ выделены задачи для самостоятельного решения, которые можно использовать для проведения на АЗ мини-контрольных работ (МКР). К каждому ИДЗ дается письменная консультация (решение типового варианта). Чтобы сэкономить время студента при выполнении МКР, ИДЗ и других заданий, в пособие включены необходимые теоретические сведения с поясняющими их решенными примерами.

Большинство имеющихся в настоящее время учебников и учебных пособий, сборников задач и упражнений по общему курсу высшей математики для технических университетов не позволяют индивидуализировать обучение, так как содержат недостаточное количество однотипных задач и упражнений, не предусматривают выдачи каждому студенту индивидуального задания с последующим контролем и выставлением оценки. Данное пособие дает возможность перехода от пассивных форм обучения к активной творческой работе со студентами, от «валового» обучения к усилению индивидуального подхода, развитию творческих способностей обучаемых путем расширения их самостоятельной работы. Появляется возможность введения инновационных технологий в преподавание математики, например блочно-рейтинговой системы обучения и контроля знаний и умений студентов (см. приложения).

Комплекс написан в соответствии с действующими программами курса высшей математики в объеме до 500 ч для технических специальностей университетов, но может быть использован в учреждениях образования разных профилей, где количество часов, отведенное на изучение высшей математики, значительно меньше (для чего из предлагаемого материала следует сделать необходимую выборку). Кроме того, он вполне доступен студентам вечерних и заочных отделений.

Авторы выражают искреннюю признательность рецензентам – коллективу кафедры высшей математики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, возглавляемой доктором физико-математических наук, профессором В.В. Цегельником, а также заведующему кафедрой теории функций Белорусского государственного университета доктору физико-математических наук, профессору В.Г. Кротову, которые дали ряд полезных советов, способствовавших повышению качества комплекса.

Все отзывы и пожелания, которые авторы примут с благодарностью, просьба направлять по адресу: издательство «Вышэйшая школа», пр. Победителей, 11, 220004, Минск.

Авторы

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Охарактеризуем структуру пособия, методику его использования, организацию проверки и оценки знаний, навыков и умений студентов.

Весь теоретический материал по курсу высшей математики разделен на главы, в каждой из которых даются основные определения, понятия, формулировки теорем, формулы, используемые при решении задач и выполнении упражнений. Изложение этих сведений иллюстрируется решенными примерами. (Начало решения примеров обозначено символом ▶, а конец — ◀.) Затем даются подборки задач с ответами для всех практических аудиторных занятий (АЗ) и самостоятельных (мини-контрольных) работ на 10—15 мин во время этих занятий. И, наконец, приводятся недельные индивидуальные домашние задания (ИДЗ), каждое из которых содержит 30 вариантов и сопровождается решением типового варианта (письменная консультация). Часть задач из ИДЗ снабжена ответами. В конце каждой главы помещены дополнительные задачи повышенной трудности и прикладного характера. Некоторые из них (помеченные звездочкой) могут служить темами для научно-исследовательской работы студентов.

В приложениях приведены одно- и двухчасовые контрольные работы (каждая по 30 вариантов) по важнейшим темам курса.

Нумерация АЗ сквозная и состоит из двух чисел: первое из них указывает на главу, а второе — на порядковый номер АЗ в этой главе. Например, шифр АЗ-14.1 означает, что АЗ относится к четырнадцатой главе и является первым по счету.

Для ИДЗ также принята нумерация по главам. Например, шифр ИДЗ-15.2 означает, что ИДЗ относится к пятнадцатой главе и является вторым. Внутри каждого ИДЗ принята следующая нумерация: первое число означает номер задачи в данном задании, а второе — номер варианта. Таким образом, шифр ИДЗ-15.2:16 означает, что студент должен выполнить 16-й вариант из ИДЗ-15.2, который содержит задачи 1.16, 2.16, 3.16, 4.16, 5.16. При выдаче ИДЗ студентам номера выполняемых вариантов можно менять от задания к заданию по какой-либо системе или случайным образом. Более того, можно при выдаче ИДЗ любому студенту составить его вариант, комбинируя однотипные задачи из разных вариантов. Например, шифр

ИДЗ-16.1:1.2; 2.4; 3.6 означает, что студенту следует решать в ИДЗ-16.1 первую задачу из варианта 2, вторую – из варианта 4 и третью – из варианта 6. Такой комбинированный метод выдачи ИДЗ позволяет из 30 вариантов получить большое количество новых вариантов.

Внедрение ИДЗ в учебный процесс некоторых технических университетов показало, что целесообразнее выдавать ИДЗ не после каждого АЗ (которых, как правило, два в неделю), а одно недельное ИДЗ, включающее основной материал двух АЗ данной недели.

Дадим некоторые общие рекомендации по организации работы в соответствии с настоящим пособием.

1. Студенческие группы по 25 человек, проводится два АЗ в неделю, планируются еженедельные не обязательные для посещения студентами консультации, выдаются недельные ИДЗ. При этих условиях для систематического контроля с выставлением оценок, указанием ошибок и путей их исправления могут быть использованы выдаваемые каждому преподавателю матрицы ответов и банк листов решений, которые кафедра разрабатывает для ИДЗ (студентам они не выдаются). Если матрицы ответов составляются для всех задач из ИДЗ, то листы решений разрабатываются только для тех задач и вариантов, где важно проверить правильность выбора метода, последовательности действий, навыки и умения при вычислениях. Кафедра определяет, для каких ИДЗ нужны листы решений. Последние (один вариант – на одном листе) используются при самоконтроле правильности выполнения заданий, при взаимном студенческом контроле, а чаще всего – при комбинированном контроле: преподаватель проверяет лишь правильность выбора метода, а студент по листу решений – свои вычисления. Эти методы позволяют проверить ИДЗ 25 студентов за 15–20 мин с выставлением оценок в журнал.

2. Студенческие группы по 15 человек, проводится два АЗ в неделю, в расписание для каждой группы включены обязательные 2 ч в неделю самоподготовки под контролем преподавателя. При этих условиях организация индивидуальной, самостоятельной, творческой работы студентов, оперативного контроля за качеством этой работы значительно улучшается. Рекомендованные выше методы пригодны и в данном случае, однако появляются новые возможности. На АЗ быстрее проверяются и оцениваются ИДЗ, во время обязательной самоподготовки можно проконтролировать проработку теории и решение ИДЗ,

выставить оценки некоторой части студентов, принять задолженности по ИДЗ у отстающих.

Накапливание большого количества оценок за ИДЗ, самостоятельные и контрольные работы в аудитории позволяют контролировать учебный процесс, управлять им, оценивать качество усвоения изучаемого материала. Все это дает возможность отказаться от традиционного итогового семестрового (годового) экзамена по материалу всего семестра (учебного года) и ввести рейтинг-блок-модульную систему (РБМС) оценки знаний и навыков студентов, состоящую в следующем. Материал семестра (учебного года) разделяется на 2–3 блока, по каждому из которых выполняются АЗ, ИДЗ и в конце каждого цикла – двухчасовая письменная коллоквиум-контрольная работа (блочный экзамен, блочная контрольная работа – БКР), в которую входит 2–3 теоретических вопроса и 5–6 задач. Учет оценок по АЗ, ИДЗ и БКР позволяет вывести объективную общую оценку за каждый блок и итоговую оценку по всем блокам семестра (учебного года).

В заключение отметим, что усвоение содержащегося в пособии материала при любой системе обучения гарантирует студенту знания по соответствующим разделам курса высшей математики. Для отлично успевающих студентов необходима подготовка заданий повышенной сложности (индивидуальный подход в обучении!) с перспективными поощрительными мерами. Например, можно разработать для таких студентов специальные задания на весь семестр, включающие задачи из данного пособия и дополнительные более сложные задачи и теоретические упражнения (для этого, в частности, предназначены дополнительные задачи в конце каждой главы). Преподаватель может выдать эти задания в начале семестра, установить график их выполнения (под своим контролем), разрешить свободное посещение лекционных или практических занятий по высшей математике и в случае успешной работы выставить отличную оценку. Эта оценка достигается, как правило, при участии студента в НИРС.

14. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

14.1. Криволинейные интегралы и их вычисление

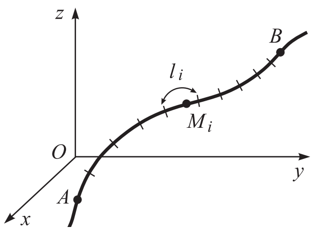

Рис. 14.1

Криволинейные интегралы первого рода (по длине дуги). Пусть в пространстве $\mathbf{R}^3$ задана гладкая дуга L_{AB} кривой L, во всех точках которой определена непрерывная функция $u = f(x, y, z)$. Дугу L_{AB} произвольным образом разобьем на n частей l_i длиной $\Delta l_i (i = \overline{1, n})$. В каждой элементарной части l_i выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ (рис. 14.1) и составим интегральную сумму:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i.$$

Тогда предел $\lim\limits_{\Delta l_i \to 0} I_n$ всегда существует. Он называется *криволинейным интегралом первого рода* или *криволинейным интегралом по длине дуги* L_{AB} от функции $f(x, y, z)$ и обозначается $\int\limits_{L_{AB}} f(x, y, z)dl$.

Таким образом, по определению

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y, z)dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i.$$

Если кривая L лежит в плоскости Oxy и на этой кривой задана непрерывная функция $f(x, y)$, то

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y)dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i. \tag{14.1}$$

В случае, когда гладкая кривая L задана в пространстве $\mathbf{R}^3$ параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ и параметр t изменяется монотонно на отрезке $[\alpha, \beta]$ $(\alpha < \beta)$ при перемещении по кривой L из точки A в точку B, верна формула для вычисления криволинейного интеграла

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y, z)dl =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt. \quad (14.2)$$

В случае плоской кривой формула (14.2) упрощается:

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt. \quad (14.3)$$

Если уравнение плоской кривой $\rho = \rho(\varphi)$ задано в полярных координатах ρ, φ, функция $\rho(\varphi)$ и ее производная $\rho' = d\rho/d\varphi$ непрерывны, то имеет место частный случай формулы (14.3), где в качестве параметра t взят полярный угол φ:

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y)dl = \int\limits_{\varphi_A}^{\varphi_B} f(\rho(\varphi)\cos\varphi,\ \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi \quad (14.4)$$

(φ_A, φ_B – значения φ, определяющие на кривой точки A и B).

Если плоская кривая задана непрерывной и непрерывно дифференцируемой на $[a, b]$ функцией $y = y(x)$, где a, b – абсциссы точек A и B, то

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y)dl = \int\limits_{a}^{b} f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx. \quad (14.5)$$

Итак, во всех случаях вычисление криволинейного интеграла первого рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Пример 1. Вычислить $I = \int\limits_L (2z - \sqrt{x^2 + y^2})dl$, где L – первый виток конической винтовой линии $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

▸ Находим:

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt =$$

$$= \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\, dt = \sqrt{2 + t^2}\, dt.$$

Тогда

$$I = \int\limits_0^{2\pi} (2t - t)\sqrt{2 + t^2}\, dt = \int\limits_0^{2\pi} t\sqrt{2 + t^2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{3}(2 + t^2)^{3/2}\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{3}((1 + 2\pi^2)^{3/2} - 1). ◂$$

Пример 2. Вычислить $I=\int\limits_L \frac{dl}{x+2y+5}$, где L – отрезок прямой $y=2x-2$, заключенный между точками $A(0, -2)$, $B(1, 0)$.

▶ Находим:

$$dl=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{1+4}\,dx=\sqrt{5}\,dx.$$

Следовательно,

$$I=\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{5}\,dx}{x+2(2x-2)+5}=\sqrt{5}\int\limits_0^1 \frac{dx}{5x+1}=\frac{\sqrt{5}}{5}\ln|5x+1|\Big|_0^1=\frac{\sqrt{5}}{5}\ln 6. \blacktriangleleft$$

Поскольку согласно формулам (14.2)–(14.5) криволинейный интеграл первого рода выражается через определенный интеграл, укажем только те его свойства, которые обобщают свойства определенного интеграла, а также приложения криволинейного интеграла к задачам геометрического и физического содержания.

1. $\int\limits_{L_{AB}} dl=l_{AB}$, где l_{AB} – длина дуги AB (*геометрический смысл криволинейного интеграла первого рода*).

2. Если $f(x, y, z)=\delta(x, y, z)$ – линейная плотность материальной дуги L_{AB}, то ее масса m вычисляется по формуле

$$m=\int\limits_{L_{AB}} \delta(x, y, z)\,dl \tag{14.6}$$

(*механический смысл криволинейного интеграла первого рода*).

3. Координаты центра масс материальной дуги L_{AB}, имеющей линейную плотность $\delta=\delta(x, y, z)$, определяются по формулам:

$$x_C=\frac{1}{m}\int\limits_{L_{AB}} x\delta(x, y, z)\,dl,\ y_C=\frac{1}{m}\int\limits_{L_{AB}} y\delta(x, y, z)\,dl,$$
$$z_C=\frac{1}{m}\int\limits_{L_{AB}} z\delta(x, y, z)\,dl, \tag{14.7}$$

где m – масса дуги L_{AB}.

4. Моменты инерции относительно начала координат O, осей координат Ox, Oy, Oz и координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz материальной дуги L_{AB}, имеющей линейную плотность $\delta=\delta(x, y, z)$, вычисляются соответственно по формулам:

$$\left.\begin{aligned} I_0 &= \int\limits_{L_{AB}} (x^2+y^2+z^2)\delta dl, \quad I_x = \int\limits_{L_{AB}} (y^2+z^2)\delta dl, \\ I_y &= \int\limits_{L_{AB}} (x^2+z^2)\delta dl, \quad I_z = \int\limits_{L_{AB}} (x^2+y^2)\delta dl, \\ I_{xy} &= \int\limits_{L_{AB}} z^2\delta dl, \quad I_{xz} = \int\limits_{L_{AB}} y^2\delta dl, \quad I_{yz} = \int\limits_{L_{AB}} x^2\delta dl. \end{aligned}\right\} \quad (14.8)$$

Моменты инерции связаны следующими соотношениями:

$$2I_0 = I_x + I_y + I_z, \quad I_0 = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz}.$$

Если дуга L_{AB} лежит в плоскости Oxy, то рассматриваются только моменты I_0, I_x, I_y (при условии, что $z = 0$).

5. Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет размерность длины и $f(x, y) > 0$ во всех точках плоской дуги L_{AB}, лежащей в плоскости Oxy. Тогда

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y)dl = S,$$

где S – площадь части цилиндрической поверхности с образующими, которые параллельны оси Oz и проходят через точки дуги L_{AB}, ограниченной снизу дугой L_{AB}, сверху – линией пересечения цилиндрической поверхности с поверхностью $z = f(x, y)$, а с боков – прямыми, проходящими через точки A и B параллельно оси Oz. На рис. 14.2 изображена описанная часть цилиндрической поверхности $ABB'A'$. Если $f(x, y) < 0$ во всех точках плоской дуги L_{AB}, то

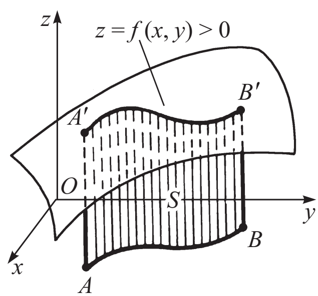

Рис. 14.2

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y)dl = -S$$

(рис. 14.3). И, наконец, в некоторых точках плоской дуги L_{AB} функция $f(x, y)$ меняет знак. Тогда интеграл $\int\limits_{L_{AB}} f(x, y)dl$ выражает разность площадей частей описанной цилиндрической

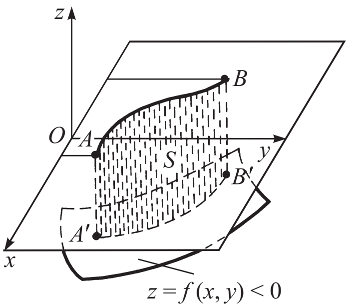

Рис. 14.3

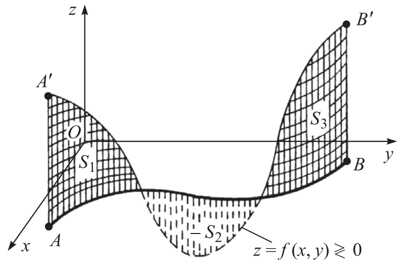

Рис. 14.4

поверхности, находящихся над плоскостью Oxy и под ней (рис. 14.4):

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y)dl = S_1 - S_2 + S_3.$$

Пример 3. Вычислить массу m и координаты центра масс x_C, y_C плоской материальной дуги $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, линейная плотность которой $\delta(x, y) = y\sqrt{1+x}$.

▶ Согласно формулам (14.5) и (14.6) для случая плоской дуги имеем:

$$m = \int\limits_0^1 \delta(x, y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx = \frac{2}{3}\int\limits_0^1 x^{3/2}\sqrt{1+x}\sqrt{1+x}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int\limits_0^1 (x^{3/2} + x^{5/2})dx = \frac{16}{35}.$$

По формулам (14.7) находим:

$$x_C = \frac{35}{16}\int\limits_0^1 (x^{5/2} + x^{7/2})dx = \frac{10}{9},$$

$$y_C = \frac{35}{16}\int\limits_0^1 \frac{2}{3}x^{3/2}(x^{3/2} + x^{5/2})dx = \frac{35}{24}\int\limits_0^1 (x^3 + x^4)dx = \frac{21}{32}. \blacktriangleleft$$

Пример 4. Вычислить площадь части цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = 4$, заключенной между плоскостью Oxy и поверхностью $z = 2 + x^2/2$ (рис. 14.5).

▶ Искомая площадь S цилиндрической поверхности выражается интегралом

$$S=\int_L (2+x^2/2)dl,$$

где L – окружность в плоскости Oxy: $x^2+y^2=4,\ z=0$, уравнения которой в параметрическом виде следующие: $x=2\cos t,\ y=2\sin t$. Тогда $dl=2dt$ и

$$S=\int_0^{2\pi}\left(2+\frac{1}{2}\cdot 4\cos^2 t\right)\cdot 2dt=$$

$$=4\int_0^{2\pi}(1+\cos^2 t)dt=$$

$$=4\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt=12\pi. ◄$$

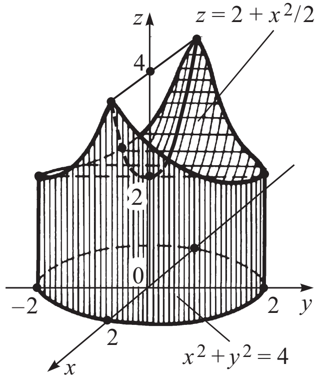

Рис. 14.5

Криволинейные интегралы второго рода (по координатам). Пусть в пространстве $\mathbf{R}^3$ задан вектор $\mathbf{a}=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+$ $+R(x,y,z)\mathbf{k}$, координаты которого – непрерывные функции в точках ориентированной кривой L_{AB}. Кривую L_{AB} разобьем в направлении от A к B на n элементарных дуг l_i и построим векторы $\overrightarrow{\Delta l_i}=\Delta x_i\mathbf{i}+\Delta y_i\mathbf{j}+\Delta z_i\mathbf{k}$, где $\Delta x_i,\ \Delta y_i,\Delta z_i$ – проекции векторов $\overrightarrow{\Delta l_i}$ на оси координат. Начала этих векторов совпадают с началами элементарных дуг l_i, а концы – с их концами (рис. 14.6). На каждой элементарной части l_i выберем произвольную точку $M_i(x_i,y_i,z_i)$ и составим интегральную сумму:

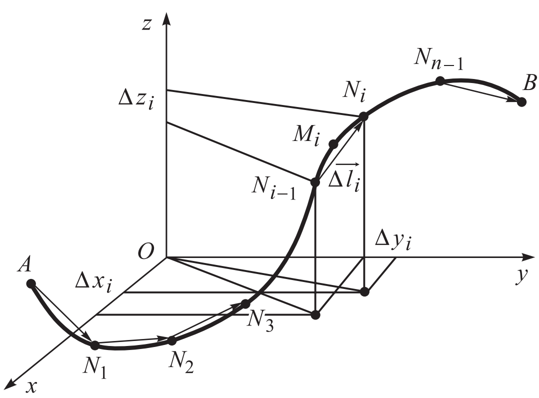

Рис. 14.6

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i, z_i)\Delta y_i + R(x_i, y_i, z_i)\Delta z_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}(x_i, y_i, z_i)\cdot \overrightarrow{\Delta l_i}. \tag{14.9}$$

Предел суммы (14.9), найденный при условии, что все $\left|\overrightarrow{\Delta l_i}\right| \to 0$, называется *криволинейным интегралом второго рода* или *криволинейным интегралом по координатам* от вектор-функции $\mathbf{a}(x, y, z)$ по кривой L_{AB} и обозначается

$$\int_{L_{AB}} \mathbf{a}(x, y, z)\cdot \mathbf{dl} = \int_{L_{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz =$$
$$= \lim_{\Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}(x_i, y_i, z_i)\cdot \overrightarrow{\Delta l_i}. \tag{14.10}$$

Если функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны в точках гладкой кривой L_{AB}, то предел суммы (14.9) существует, т.е. существует криволинейный интеграл второго рода (14.10).

Криволинейные интегралы второго рода обладают основными свойствами определенных интегралов (линейность, аддитивность). Непосредственно из определения криволинейного интеграла второго рода следует, например, что он зависит от направления интегрирования вдоль кривой, т.е. меняет знак при изменении ориентации кривой:

$$\int_{L_{AB}} \mathbf{a}\cdot \mathbf{dl} = -\int_{L_{BA}} \mathbf{a}\cdot \mathbf{dl}.$$

Если кривая интегрирования L замкнута, то криволинейные интегралы второго рода обозначают $\oint_L \mathbf{a}\cdot \mathbf{dl}$. В этом случае через кривую L проводится ориентированная поверхность и за положительное направление обхода по L принимается такое направление, при котором область поверхности, ограниченная кривой L, находится слева, если двигаться вдоль L по выбранной стороне указанной поверхности (т.е. обход контура L совершается против хода часовой стрелки).

Если плоскую область D, ограниченную кривой L, разбить на части, не имеющие общих внутренних точек и ограниченные замкнутыми кривыми L_1 и L_2, то

$$\oint_L \mathbf{a}\cdot \mathbf{dl} = \oint_{L_1} \mathbf{a}\cdot \mathbf{dl} + \oint_{L_2} \mathbf{a}\cdot \mathbf{dl},$$

где направления обхода по контурам L, L_1 и L_2 всюду либо положительные, либо отрицательные.

Если гладкая кривая L_{AB} задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции, $A(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ и $B(x(\beta), y(\beta), z(\beta))$ – соответственно начальная и конечная точки этой кривой, то верна следующая формула для вычисления криволинейного интеграла второго рода:

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz =$$
$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) +$$
$$+ R(x(t), y(t), z(t))z'(t)dt. \qquad (14.11)$$

Если кривая L_{AB} лежит в плоскости Oxy, $\mathbf{a} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$, то $R(x, y, z) = 0$, $z(t) = 0$ и формула (14.11) упрощается:

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (P(x(t)), y(t))x'(t) +$$
$$+ Q(x(t), y(t))y'(t))dt. \qquad (14.12)$$

Если кривая L_{AB} лежит в плоскости Oxy и задана уравнением $y = f(x)$, производная $f'(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, $\mathbf{a} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$, то

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{a}^{b} (P(x, f(x)) +$$
$$+ Q(x, f(x))f'(x))dx. \qquad (14.13)$$

Пример 5. Вычислить

$$I = \int\limits_{L_{AB}} ydx + (x+z)dy + (x-y)dz,$$

где L_{AB} – отрезок прямой, соединяющий точки $A(1, -1, 1)$ и $B(2, 3, 4)$.

▶ Запишем параметрические уравнения прямой AB: $x = 1 + t$, $y = -1 + 4t$, $z = 1 + 3t$. На отрезке $|AB|$ параметр $0 \leqslant t \leqslant 1$. Поэтому согласно формуле (14.11)

$$I = \int\limits_{0}^{1} ((-1+4t) + (2+4t)\cdot 4 + (2-3t)\cdot 3)dt = \int\limits_{0}^{1} (13+11t)dt = 18{,}5. \blacktriangleleft$$

Пример 6. Вычислить $I = \oint\limits_L ydx - x^2dy + (x+y)dz$, если L – кривая пересечения цилиндра $x^2 + y^2 = 4$ с плоскостью $x + y - z = 0$, «пробегаемая» в положительном направлении относительно выбранной верхней стороны данной плоскости.

▸ Найдем параметрические уравнения кривой L. Так как проекция кривой L на плоскость Oxy есть окружность $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, то можно записать, что $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$. Тогда из уравнения плоскости находим, что $z = 2(\cos t + \sin t)$. Таким образом,

$$\left.\begin{array}{l} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = 2(\cos t + \sin t),\ t \in [0, 2\pi], \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} dx = -2\sin t dt, \\ dy = 2\cos t dt, \\ dz = 2(-\sin t + \cos t)dt. \end{array}\right.$$

Отсюда по формуле (14.11) имеем:

$$I = \int\limits_0^{2\pi} (-4\sin^2 t - 8\cos^3 t + 4(\cos^2 t - \sin^2 t))dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (-2 + 2\cos 2t - 8\cos t + 8\sin^2 t\cos t + 4\cos 2t)dt = -4\pi. \blacktriangleleft$$

Пример 7. Вычислить $I = \int\limits_{L_{AB}} xydx + (x^2 + y)dy$, если линия L_{AB} – дуга параболы $y = x^2$, расположенная между точками $A(0, 0)$ и $B(2, 4)$.

▸ Поскольку в данном случае $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $x \in [0, 2]$, то согласно формуле (14.13) получаем:

$$I = \int\limits_0^2 (xx^2 + (x^2 + x^2)\cdot 2x)dx = \int\limits_0^2 5x^3dx = \frac{5}{4}x^4\Big|_0^2 = 20. \blacktriangleleft$$

14.2. Приложения криволинейных интегралов

С помощью криволинейных интегралов первого рода можно вычислять длину дуги кривой, массу материальной дуги, ее центр масс, площади цилиндрических поверхностей и другие величины.

Пример 1. Вычислить массу m дуги кривой L, заданной уравнениями $x = t^2/2$, $y = t$, $z = t^3/3$, $0 \leqslant t \leqslant 2$, если в каждой ее точке плотность $\delta = \sqrt{1 + 4x^2 + y^2}$.

▸ Согласно формуле (14.6) искомая масса m выражается интегралом

$$m=\int_L \sqrt{1+4x^2+y^2}\,dl=\int_0^2 \sqrt{1+t^4+t^2}\sqrt{t^2+1+t^4}\,dt=$$

$$=\int_0^2 (1+t^2+t^4)dt=116/15. ◂$$

Пример 2. Вычислить координаты центра масс однородной дуги окружности $x^2+y^2=R^2$, расположенной в первом квадранте, и моменты инерции I_0, I_x, I_y.

▸ Так как прямая $y=x$ является осью симметрии дуги окружности, то $x_C=y_C$. Для нахождения x_C используем первую из формул (14.7):

$$x_C=\int_L x\delta dl \Big/ \int_L \delta dl=\int_L x dl \Big/ \int_L dl,$$

поскольку $\delta=\text{const}$. Интеграл

$$\int_L dl=\frac{1}{2}\pi R$$

определяет длину четверти рассматриваемой окружности. Вычислим $\int_L x dl$, где $x=R\cos t$; $y=R\sin t$; $0\leqslant t\leqslant \pi/2$;

$$dl=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=Rdt.$$

Следовательно,

$$\int_L x dl=\int_0^{\pi/2} R\cos tRdt=R^2\sin t\Big|_0^{\pi/2}=R^2.$$

Окончательно имеем:

$$x_C=y_C=\frac{R^2}{\pi R/2}=\frac{2R}{\pi}.$$

При вычислении I_0, I_x, I_y воспользуемся формулами (14.8), а затем (14.3) для случая плоской дуги ($z\equiv 0$) и учтем, что $I_x=I_y$:

$$I_0=\int_L (x^2+y^2)\delta dl=\delta\int_0^{\pi/2} R^2Rdt=R^3\delta\pi/2,$$

$$I_x=\int_L y^2\delta dl=\delta\int_0^{\pi/2} R^2\sin^2 tRdt=\frac{R^3\delta}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)dt=\pi R^3\delta/4. ◂$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Рябушко Антон Петрович
Жур Татьяна Антоновна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Теория и задачи

Учебное пособие

В пяти частях
Часть 4

Криволинейные интегралы.
Элементы теории поля.
Функции комплексной переменной

Редактор *Е.В. Малышева*
Художественный редактор *В.А. Ярошевич*
Технический редактор *Н.А. Лебедевич*
Корректор *Т.В. Кульнис*
Компьютерная верстка *М.В. Горецкой*

Подписано в печать 27.11.2017. Формат 84×108/32. Бумага офсетная.
Гарнитура «Ньютон». Офсетная печать. Усл. печ. л. 13,44. Уч.-изд. л. 14,70.
Тираж 600 экз. Заказ 3279.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Вышэйшая школа”».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/3 от 08.07.2013.
Пр. Победителей, 11, 220004, Минск.
e-mail: market@vshph.com http://vshph.com

Открытое акционерное общество «Типография “Победа”».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 2/38 от 29.01.2014.
Ул. Тавлая, 11, 222310, Молодечно.