М.А. Маталыцкий
Г.А. Хацкевич

# Теория вероятностей и математическая статистика

*Утверждено
Министерством образования
Республики Беларусь
в качестве учебника
для студентов учреждений
высшего образования
по физико-математическим
специальностям*

Минск
«Вышэйшая школа»
2017

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171я73
М33

Рецензенты: кафедра теории вероятностей и математической статистики Белорусского государственного университета (заведующий кафедрой доктор физико-математических наук, профессор *Н.Н. Труш*, доктор физико-математических наук, профессор *Г.А. Медведев*)



**Матальщкий, М. А.**
М33 Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / М. А. Матальщкий, Г. А. Хацкевич. – Минск : Вышэйшая школа, 2017. – 591 с. : ил.
ISBN 978-985-06-2855-8.

Приведены определения вероятности случайных событий и соотношения, связанные с условными вероятностями и схемой Бернулли; типы случайных величин, их числовые и функциональные характеристики; закон больших чисел и центральная предельная теорема; сведения о марковских случайных процессах и цепях Маркова с дискретным и непрерывным временем, стохастических интегралах и дифференциальных уравнениях. Рассмотрены вопросы применения случайных процессов; основные распределения, применяемые в статистике; проверка простых и сложных гипотез; последовательный и дисперсионный анализ; линейные регрессионные модели. Даны решения более 130 различных типов примеров и более 800 задач для самостоятельного решения.

Для студентов учреждений высшего образования по физико-математическим специальностям. Будет полезен магистрантам и аспирантам, преподавателям, а также научным и практическим работникам.

**УДК 519.2(075.8)**
**ББК 22.171я73**

**ISBN 978-985-06-2855-8**

# ПРЕДИСЛОВИЕ

За последние десятилетия значительно увеличился объем преподавания дисциплин, использующих вероятностные и статистические методы. В высших учебных заведениях для студентов ряда математических («Математика», «Прикладная математика», «Экономическая кибернетика», «Актуарная математика», «Математическая экономика», «Компьютерная безопасность») и физических специальностей читается годовой или полугодовой курс теории вероятностей и математической статистики. Курс состоит из трех основных разделов: элементы теории вероятностей, случайных процессов и математической статистики, по которым написан данный учебник. Он подготовлен на базе лекций и методических разработок по курсу теории вероятностей и математической статистики, читаемому авторами для студентов различных физико-математических специальностей.

Отличительной особенностью учебника является то, что кроме основательного рассмотрения понятий и методов современной теории вероятностей, случайных процессов и математической статистики он содержит большое количество разнообразных теоретических примеров и задач различной степени трудности, многие из которых снабжены ответами. Это позволяет использовать учебник не только для чтения лекций, но и для проведения практических занятий.

Структура изложения курса такова, что представленный материал может одновременно играть роль учебника, задачника и справочника. Много внимания уделено вопросам применения вероятностных методов в различных областях. Основные теоремы приведены с полными доказательствами, которые могут быть использованы при доказательстве различных утверждений, сформулированных в задачах. В большинстве параграфов есть простые задачи, которые сводятся к прямому применению основных формул и приемов. Также присутствуют достаточно сложные задачи, решения которых содержат важные идеи и связаны с аккуратным проведением математических выкладок и практическими применениями. Такие задачи отмечены звездочкой, они могут служить началом курсовой работы. В учебнике представлены задачи «прикладного» характера, что позволяет не только обучить студентов теоретическим основам, но и привить навыки вероятностно-статистического моделирования реальных явлений.

При составлении задач был использован ряд отечественных и зарубежных учебников и задачников, приведенных в списке литературы, некоторые из задач составлены авторами.

Первые два раздела написаны профессором М.А. Маталыцким, третий раздел – профессором Г.А. Хацкевичем.

Предназначен для студентов учреждений высшего образования по физико-математическим специальностям, также будет полезен студентам, магистрантам, аспирантам, специалистам, желающим познакомиться с основными методами и результатами теории вероятностей, случайных процессов и математической статистики.

Выражаем благодарность рецензентам, сделавшим ряд полезных замечаний.

*Авторы*

# ВВЕДЕНИЕ

Теорию вероятностей можно определить как науку, изучающую случайные события. Случайные события как они понимаются в теории вероятностей обладают рядом характерных особенностей, в частности все они происходят в массовых явлениях.

Первые вероятностные задачи были связаны с азартными играми. В XVIII в. вероятностными задачами занимались Б. Паскаль, П. Ферма, Я. Бернулли (автор закона больших чисел). В XVIII в. де Муавр сформулировал первое предельное утверждение, относящееся позже к центральной предельной теореме, а Т. Байес предложил свою знаменитую формулу, заложив тем самым фундамент развитой позднее теории оценивания. Дальнейшее развитие теории вероятностей во второй половине XVIII в. и первой половине XIX в. связано с именем П. Лапласа. Его классический трактат «Theorie Analytique des Probabilities» содержит оригинальные результаты собственных исследований и предшественников. К этому же периоду относятся труды К. Гаусса и С. Пуассона. Во второй половине XIX в. для развития теории вероятностей большое значение имели труды П.Л. Чебышева.

Начало XX в. связано с наиболее значительным развитием теории вероятностей. Разработаны ее математические основы, определены связи с другими разделами математики и развит аналитический аппарат. Существенно расширилась область применения в физике, технике и других областях.

Первое определение вероятности ввел П. Лаплас. Однако его определение требовало определенных логических оговорок, и область применения была довольно узкой. Введение Ж. Бюффоном геометрической вероятности было шагом вперед для обоснования основ теории вероятностей, но парадоксы Э. Бертрана свидетельствовали о существовании пробелов в ее основных понятиях.

Разработкой математических основ теории вероятностей занимались С.Н. Берштейн, В.И. Гливенко, А.Н. Колмогоров, К. Мизес, Г. Штейнгауз. Совместно события и их вероятности как нормированную булевскую алгебру определил В.И. Гливенко. Вероятность как меру Лебега, определенную в борелевском поле измеримых подмножеств отрезка [0, 1], рассматривал Г. Штейнхауз. Понятие вероятности как нормированной меры, определенной в минимальном борелевском поле подмножеств некоторого множества, называемого множеством элементарных событий, введено А.Н. Колмогоровым.

Теоремы П. Леви о характеристических функциях и разработка теории безгранично делимых законов распределения позволили найти предельные распределения для сумм независимых случайных величин (Б.В. Гнеденко, А.Н. Колмогоров, В. Феллер, А.Я. Хинчин). Утверждения А.Я. Хинчина и А.Н. Колмогорова о законе повторного логарифма и усиленном законе больших чисел углубили результаты, касающиеся закона больших чисел.

Следует отметить, что теория вероятностей постоянно развивается из потребностей практики. В абстрактной форме она отражает закономерности, присущие случайным событиям массового характера. Эти закономерности играют исключительно важную роль в физике, технике (в частности, в компьютерной), экономике и других областях естествознания.

При изучении различных явлений действительности люди сталкиваются с процессами, предсказать развитие которых заранее нельзя. Случайные процессы – удобная математическая модель функций времени, значениями которых являются случайные величины. Например, число запросов, поступающих в единицу времени на центральный сервер информационно-компьютерной сети, будучи случайной величиной, зависит от времени суток; расход электроэнергии в единицу времени – также функция времени со случайными значениями; координата отдельной молекулы в газе, заключенном в сосуд, меняется со временем и принимает случайные значения. Таким образом, можно сказать, что случайный процесс – это семейство случайных величин, зависящих от времени.

Теория случайных процессов, возникшая в результате построения математических моделей реальных физических процессов, представляет собой наиболее содержательную и более всего используемую в приложениях часть теории вероятностей. Она находит многочисленные применения в физике, технике, экономике, биологии, медицине и других дисциплинах, а также в различных разделах математики.

Приведем некоторые исторические замечания. Первое математическое описание случайного процесса, в настоящее время называемого винеровским или процессом броуновского движения, дал Л. Башелье в 1900 г. в докладе, представленном им Парижской академии. Он предложил использовать этот процесс в качестве модели колебаний цены активов, стремился получить аналитические выражения для стоимости различных типов опционов и сравнить их с наблюдаемыми рыночными ценами опционов. Опцион является примером финансовой производной и дает его владельцу право купить указанное число долей акций по определенной цене в указанную дату или до нее.

Вообще понятие случайного процесса возникло в XX в. и связано с именами А.Н. Колмогорова, А.Я. Хинчина, Е.Е. Слуцкого, Н. Винера. То, что теория случайных процессов принадлежит к категории наиболее быстро развивающихся математических дисциплин, в значительной мере определяется ее глубокими связями с практикой.

В 1905 г. двумя известными физиками М. Смолуховским и А. Эйнштейном была разработана теория броуновского движения, исходящая из теоретико-вероятностных предпосылок. Она привела математику к порогу создания теории случайных процессов. В исследованиях датского ученого А.К. Эрланга была начата новая важная область поисков, связанных с изучением загрузки телефонных сетей. Эти работы оказали значительное влияние не только на решение чисто телефонных задач, но и на формирование элементов теории случайных процессов, в частности процессов гибели и размножения. Такие процессы позднее применялись при исследовании динамики биологических популяций, именно от задач биологии и пошло наименование частного типа случайных процессов.

Известные физики М. Планк и А. Фоккер в 1914 г. начали изучать явления диффузии, используя средства теории вероятностей. Основатель кибернетики Н. Винер в середине 20-х гг. XX в. при изучении броуновского движения ввел в рассмотрение процессы, названные винеровскими. Следует также отметить работы русского математика А.А. Маркова по изучению цепных зависимостей (цепи Маркова) и Е.Е. Слуцкого по теории случайных функций.

В 1931 г. была опубликована большая статья А.Н. Колмогорова «Об аналитических методах в теории вероятностей», в которой были заложены основы теории марковских процессов: в ней получены прямые и обратные дифференциальные уравнения, которые управляют вероятностями перехода случайных процессов без последействия. В этой же работе был дан набросок теории скачкообразных процессов без последействия, подробное развитие которой позднее (1936) было дано В. Фелером, получившим интегро-дифференциальное уравнение для скачкообразных марковских процессов. В 1934 г. в работе А.Я. Хинчина осуществлено построение основ стационарных случайных процессов на базе физических задач. Он ввел понятие стационарного процесса в узком и широком смыслах. Вышеупомянутые работы следует считать началом построения общей теории случайных процессов, они послужили основой для последующих исследований Г. Крамера, Г. Вальда, А.Н. Колмогорова и многих других известных ученых.

Приведем ряд основных задач теории случайных процессов, большинство из которых рассматривается в данном учебнике.

1. Построение математической модели, допускающее строгое или формальное определение случайного процесса, и исследование общих свойств этой модели.

2. Классификация случайных процессов. Существующая классификация в теории случайных процессов заключается в выделении из всей совокупности таких процессов некоторых классов, допускающих более или менее конструктивное описание. Каждый класс характеризуется тем, что достаточно дополнительно задать лишь конечное число функциональных характеристик, чтобы выделить из всего класса отдельный случайный процесс. Иногда рассматривают классы процессов, допускающих единообразное решение определенного набора задач. Можно отметить следующие широкие классы процессов: марковские процессы, включая цепи Маркова; процессы с конечными моментами второго порядка (гильбертовы процессы); процессы с независимыми приращениями; стационарные в узком и широком смыслах случайные процессы, в частности гауссовский и винеровский; эргодические процессы.

3. Отыскание для различных классов случайных процессов аналитического аппарата, позволяющего находить вероятность характеристики процессов (тесно связано с классификацией случайных процессов). Для простейших вероятностных характеристик такой аппарат создан. Он использует, как правило, теорию обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными, а также интегро-дифференциальные и интегральные уравнения, разностные уравнения, преобразования Фурье.

4. Изучение различных преобразований случайных процессов. Эти преобразования используются для того, чтобы с их помощью изучать сложные процессы путем сведения их к более простым. К такой задаче можно отнести и анализ стохастиче-

ских дифференциальных и интегральных уравнений, в которые входят случайные процессы.

5. Определение значений некоторого функционала от процесса по значениям других функционалов от этого же процесса также играет важную роль в формировании ряда разделов теории случайных процессов. Примером такой задачи является задача предсказания, позволяющая определить значение процесса в некоторые будущие моменты времени, наблюдая процесс в течение конкретного промежутка времени.

Кратко опишем некоторые основные области применения различных классов случайных процессов.

Марковские процессы широко используются при разработке математических моделей информационно-компьютерных систем и сетей в математической финансовой экономике, математической биологии, теории каскадов космических частиц. В этой же теории применяются процессы с независимыми приращениями. Стационарные в узком и широком смыслах случайные процессы широко распространены в радиоэлектронике и теории информации, а гауссовские процессы – также в радиоэлектронике и молекулярной теории газов.

Следует отметить, что в последнее время теория вероятностей и случайных процессов превратилась в стройную математическую дисциплину с собственными проблемами и методами доказательств. Выяснилось, что наиболее существенные проблемы этой теории служат делу решения многочисленных прикладных задач. Методы теории вероятностей и случайных процессов находят все новые области применения. Кроме того, ни одна из естественных наук и многие гуманитарные науки не избежали влияния данной теории.

Математическая статистика является аксиоматически обоснованной математической наукой, которая, придавая теоретическое обоснование результатам статистической отрасли, обеспечивает информационную поддержку органам управления социально-экономическим развитием любой страны. Однако следует заметить, что еще в начале XX в. этот признанный в современной научной классификации раздел математической науки относился к эмпирическому и экспериментальному направлениям. Заслуга в признании статистики математической наукой принадлежит прежде всего английскому математику К. Пирсону. Трудно переоценить его вклад в разработку математического аппарата статистики, содержащего теорию корреляции и критерии согласия. В дальнейшем развитии математической статистики необходимо упомянуть Р. Фишера (дисперсионный анализ), И. Фишера (теория статистических индексов), А.А. Чупрова, Н.С. Четверикова, Е.Е. Слуцкого (статистический анализ временных рядов). В становление математической статистики большой вклад внесли А.Н. Колмогоров, Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов, Д.М. Чибисов.

# РАЗДЕЛ I. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

## ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

### 1.1. Случайные события и соотношения между ними

Типичной формой закона, устанавливаемого научной теорией, является следующая: создание условий $A$ неизбежно приводит к $B$. Цель теории – определение условий, при которых какое-либо интересующее нас событие заведомо происходит или заведомо не происходит, т.е. эти условия могут быть выражены по одной из двух схем:

а) если осуществляется комплекс условий $A$, то с достоверностью происходит событие $B$;

б) если осуществляется комплекс условий $A$, то событие $B$ произойти не может.

В первом случае событие $B$ по отношению к комплексу условий $A$ называется достоверным, а во втором – невозможным. Такие события принято называть детерминированными. Они с неизбежностью следуют после осуществления соответствующего комплекса условий. Другими словами, комплекс условий $A$ в этом случае однозначно определяет событие $B$. Событие $B$, которое при осуществлении комплекса условий $A$ иногда происходит, а иногда не происходит, называется случайным по отношению к данному комплексу условий.

Дадим строгое определение случайного события, для чего приведем понятие об элементарных событиях.

**Определение.** Возможные события, порождаемые комплексом условий, называются элементарными:

а) если они различны (т.е. осуществление одного означает неосуществление любого другого);

б) после выполнения комплекса условий обязательно происходит одно из них.

Заметим, что эти условия определяют элементарные события неоднозначно: даже в одной и той же задаче они могут быть определены по-разному. Обозначим через $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$ пространство элементарных событий.

**Определение.** Любое объединение элементарных событий называется случайным событием, $B \subseteq \Omega$.

Событие $B$ осуществляется тогда, когда происходит одно из элементарных событий $\omega \in B$. В этом смысле пространство

$\Omega$ может рассматриваться тоже как событие. Одно из элементарных событий происходит всегда, следовательно, и событие $\Omega$ происходит всегда, поэтому оно достоверное. Событие, не содержащее ни одного элементарного события, является невозможным и обозначается $\varnothing$.

Таким образом, мы пришли к описанию случайных событий как множеств, получающихся объединением элементарных событий. В связи с этим для определения соотношений между случайными событиями в теории вероятностей принят язык теории множеств, который приобретает своеобразную вероятностную трактовку. Поясним некоторые из них с помощью табл. 1.1.

*Таблица 1.1.* **Соотношения для множеств и случайных событий**

| Язык теории множеств | Соотношения между событиями на языке теории множеств |
|---|---|
| $A = B \bigcup C$ | Событие $A$ (объединение событий $B$ и $C$) происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий $B$ и $C$ |
| $A = B \bigcap C$ | Событие $A$ (пересечение событий $B$ и $C$) происходит тогда и только тогда, когда происходят и событие $B$, и событие $C$ |
| $B \bigcap C = \varnothing$ | События $B$ и $C$ являются несовместными. Если событие $C$ происходит, то событие $B$ не происходит |
| $C \subset B$ | Событие $C$ влечет за собой событие $B$ |
| $A = \Omega \setminus B$, ($A = \overline{B}$) | Событие $A$ является дополнительным (противоположным) по отношению к событию $B$. Событие $A$ происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие $B$ |
| $A = B \setminus C$ | Событие $A$ происходит тогда и только тогда, когда событие $B$ происходит, а событие $C$ не происходит |

Соотношения между событиями наглядно иллюстрируются на диаграммах Вьенна – Эйлера, где пространство $\Omega$ изображено в виде квадрата, внутренними точками являются элементарные события: событие $B$ – круг, событие $C$ – треугольник, событие $A$ – заштрихованные области. Приведем диаграммы (рис. 1.1) для соотношений между событиями, представленными в табл. 1.1.

Для анализа соотношений между случайными событиями могут оказаться полезными следующие соотношения.

1. $A \bigcup B = B \bigcup A$, $A \bigcap B = B \bigcap A$. Эти равенства следуют из определений.

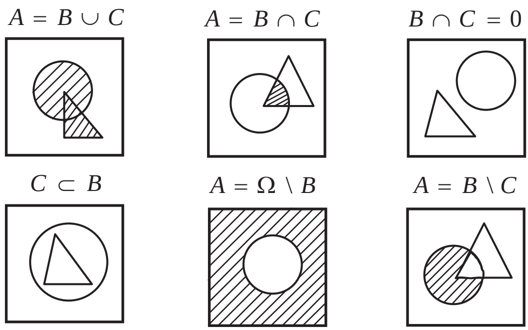


*Рис. 1.1.* Диаграммы Вьенна – Эйлера для соотношений между событиями, представленными в табл. 1.1

2. $\overline{A \bigcup B} = \bar{A} \bigcap \bar{B}$. Доказательство следует из следующей цепочки импликаций:

$$\omega \in \overline{A \bigcup B} \Rightarrow \omega \notin A \bigcup B \Rightarrow \omega \notin A, \omega \notin B \Rightarrow \omega \in \bar{A}, \omega \in \bar{B} \Rightarrow \omega \in \bar{A} \bigcap \bar{B}$$

и, наоборот,

$$\omega \in \bar{A} \bigcap \bar{B} \Rightarrow \omega \notin A, \omega \notin B \Rightarrow \omega \notin A \bigcup B \Rightarrow \omega \in \overline{A \bigcup B}.$$

3. $\overline{A \bigcap B} = \bar{A} \bigcup \bar{B}$.

4. $A \subset B \Rightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$. Это следует из того, что если $\omega \in \bar{B}$, то $\omega \notin B$, поэтому $\omega \notin A$ и, значит, $\omega \in \bar{A}$.

Из соотношений 2–4 следует, что если задана некоторая конструкция из событий, ее дополнение можно выразить, заменив в ней все события на противоположные, а символы объединения, пересечения и включения – на символы пересечения, объединения и символ, обратный к включению, соответственно. Это свойство известно под названием закона де Моргана, например $\overline{(A \bigcup B) \bigcap C} = (\bar{A} \bigcap \bar{B}) \bigcup \bar{C}$.

## 1.2. Вероятностные модели. Классическое определение вероятности

Любому случайному событию $A \subseteq \Omega$ поставим в соответствие действительное неотрицательное число $P(A)$, которое будем называть вероятностью события $A$. Положим, что $P(0) = 0$, $P(\Omega) = 1$. Если $\Omega$ состоит из конечного множества элементарных событий, $\Omega = \left\{\omega_k, k = \overline{1, N}\right\}$, и $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \omega_{j_k}$, $n < N$, то естественно предположить, что $0 = P(0) < P(A) < P(\Omega) = 1$. Если все $\omega_k$, $k = \overline{1, N}$, равновозможны, то естественно также предположить, что вероятность события $A$ пропорциональна числу элементарных событий, которое оно объединяет,

$$P(A) = pn,$$

где коэффициент пропорциональности $p$ можно найти из условия $P(\Omega) = 1$, т.е. при $n = N$ получаем $pN = 1$, откуда следует, что $p = \dfrac{1}{N}$ и $P(A) = \dfrac{n}{N}$. К такому же результату можно прийти, если принять, что $P(\omega_k) = p$, $k = \overline{1, N}$, где $p$ имеет смысл вероятности элементарного события, и выполняется свойство аддитивности

$$P(A) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} \omega_{j_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} P(\omega_{j_k}),$$

поскольку в этом случае снова имеем $P(A) = pn$. Итак, в данном случае $p(\omega_k) = p = \dfrac{1}{N}$, $k = \overline{1, N}$. Условие

$$P(\Omega) = P(\bigcup_{k=1}^{N} \omega_k) = \sum_{k=1}^{N} P(\omega_k) = 1$$

называется условием нормировки.

Говорят, что определена *вероятностная модель*, если указано множество $\Omega$ всех возможных элементарных событий и на этих элементарных событиях найдена вероятностная функция $P(\omega)$. Для рассмотренного выше случая вероятностная модель определяется следующим образом:

$$\Omega = \left\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k, \ldots, \omega_N\right\};$$

$$P(\omega) = \left\{\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{1}{N}\right\}.$$

Эта вероятностная модель называется *классической*. В ней определение вероятностей событий устанавливается следующим образом.

**Определение** (*классическое определение вероятности*). Пусть пространство элементарных событий состоит из конечного числа равновозможных элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...., \omega_N\}$ и пусть случайное событие $A$ состоит из $n$ элементарных событий: $A = \{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, ..., \omega_{j_n}\}$, $\omega_{j_i} \in \Omega$, $i = \overline{1, n}$. Тогда вероятностью события $A$ называется число

$$P(A) = \frac{n}{N}.$$

Данная формула называется формулой классической вероятности.

***Пример 1.1.*** Монету бросают дважды. Необходимо найти вероятность того, что хотя бы 1 раз монета упадет гербом вверх.

*Решение.* Пространством элементарных событий является множество $\Omega = \{ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ\}$. Здесь ГЦ означает, что при первом бросании появился герб, а при втором – цифра. Таким образом, $N = 4$. Пусть $A$ = {хотя бы 1 раз появится герб}, тогда

$$A = \{ГГ, ГЦ, ЦГ\} \Rightarrow n = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{4}.$$

Пусть теперь пространство $\Omega$ состоит из счетного числа элементарных событий, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k, ...\}$. В этом случае надо считать, что либо $P(\omega_k)$ неодинаковы, либо свойство аддитивности не выполняется. В противном случае, так как $\Omega$ неограничено, мы бы получили $P(\omega_k) = 0$, $\forall k = 1, 2, ...$. Оказывается, что если выбрать первую возможность, то получающаяся схема является целесообразной и непротиворечивой. Поэтому в данном случае полагают $P(\omega_k) = p_k$, $k = 1, 2, ...$. Свойство аддитивности при этом сохраняется, а условие нормировки имеет вид

$$P(\Omega) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \omega_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (\omega_k) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

Говорят, что задана *дискретная вероятностная модель*, если задано дискретное вероятностное множество элементарных событий (счетное или конечное) и для каждого из этих событий определена вероятность, т.е. заданы

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k, ...\};$$

$$P(\omega) = \{p_1, p_2, ..., p_k, ...\}.$$

## 1.3. Элементы комбинаторики

Основной проблемой при решении задач с использованием формулы классической вероятности является подсчет числа способов, которыми могло произойти то или иное событие. В связи с этим такие задачи решаются, как правило, методами комбинаторики.

Часто применяется следующее очевидное правило (основной принцип комбинаторики): если некий выбор $A$ можно осуществить $m$ различными способами, а некоторый другой выбор $B$ можно осуществить $n$ способами, то выбор $A$ и $B$ ($A$ или $B$) можно осуществить $mn(m+n)$ способами. При этом классическое определение вероятности можно дать другими словами.

**Определение.** Рассмотрим эксперимент, имеющий $N$ одинаково возможных исходов (любой мыслимый результат эксперимента называется элементарным событием). Предположим, что событию $A$ благоприятствует $n$ из этих исходов (оно состоит из $n$ элементарных событий). Тогда справедлива формула классической вероятности.

При решении задач часто используют размещения, перестановки и сочетания. Если дано множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, то размещением (сочетанием) из $n$ элементов по $k$ называется любое упорядоченное (неупорядоченное) подмножество из $k$ элементов множества $\Omega$. При $k = n$ размещение называется перестановкой из $n$ элементов.

Пусть дано множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.Размещениями из трех элементов этого множества по два являются $(\omega_1, \omega_2)$, $(\omega_1, \omega_3)$, $(\omega_2, \omega_3)$, $(\omega_2, \omega_1)$, $(\omega_3, \omega_1)$, $(\omega_3, \omega_2)$, сочетаниями – $(\omega_1,\omega_2)$, $(\omega_1, \omega_3)$, $(\omega_2, \omega_3)$. Два сочетания отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, а размещения – либо самими элементами, либо порядком их следования.

Число сочетаний из $n$ элементов по $k$ вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!};$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)...(n-k+1),$$

где $A_n^k$ – число размещений из $n$ элементов по $k$; $P_k = k!$ – число перестановок из $k$ элементов. Справедливость соотношения

$A_n^k = k!C_n^k$ следует из того, что число всех $k$-элементных подмножеств множества $\Omega$ равно $C_n^k$ и каждое такое подмножество можно упорядочить $k!$ способами.

Рассмотрим перестановки с повторениями. Пусть из элементов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_i$ образуются конечные последовательности, содержащие $n$ членов, в которых $\omega_1$ повторяется $k_1$ раз, $\omega_2 - k_2$ раза, ..., $\omega_i - k_i$ раз, $k_1 + k_2 + \ldots + k_i = n$. Такие последовательности называются перестановками с повторениями. Две перестановки считаются одинаковыми, если они совпадают порядком расположения элементов, и считаются различными, если у них различный порядок расположения элементов. Число различных перестановок с повторениями равно

$$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_i) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_i!}.$$

***Пример 1.2.*** Какова вероятность того, что из 6 отмеченных чисел в карточке «Спортлото» (игра 6 из 49) $k$ чисел будут выигрышными ($k = \overline{0, 6}$)?

*Решение.* В данном примере эксперимент состоит в том, что случайным образом отмечаются 6 чисел из 49 в карточке «Спортлото», значит, равновозможными элементарными событиями будут наборы из 6 отмеченных чисел. Для определения того, произойдет или не произойдет событие $A$ (среди отмеченных чисел $k$ чисел выигрышные), порядок чисел несуществен, поэтому в качестве равновозможных элементарных событий достаточно рассматривать неупорядоченные наборы 6 чисел из 49. Следовательно, число равновозможных элементарных событий равно $C_{49}^6$. Событие $A$ состоит из наборов 6 чисел, $k$ из которых выигрышные, а $(6-k)$ проигрышные. Набор из $k$ выигрышных чисел можно выбрать $C_6^k$ способами, а набор $(6-k)$ проигрышных чисел можно выбрать $C_{43}^{6-k}$ способами. Тогда по основному принципу комбинаторики набор из $k$ выигрышных и $(6-k)$ проигрышных чисел можно выбрать $C_6^k C_{43}^{6-k}$ способами, следовательно,

$$P(A) = \frac{C_6^k C_{43}^{6-k}}{C_{49}^6}.$$

Например, для $k = 6$ имеем $P(A) \approx (14 \cdot 10^6)^{-1}$.

## Задачи к § 1.1—1.3

**1.1.** Докажите равенства для случайных событий: а) $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = A \cup B$; б) $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B$.

**1.2.** Когда возможны приведенные ниже равенства?

а) $A \cup B = A$; б) $A \cup B = \overline{A}$; в) $A \cup B = A \cap B$; г) $A \cap B = A$; д) $A \cap B = \overline{A}$.

**1.3.** Упростите выражения: а) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$; б) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$; в) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)$.

**1.4.** Докажите равенства: а) $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i$; б) $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i$.

**1.5.** Из множества студентов, присутствующих на лекции по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие $A$ состоит в том, что выбранный студент закончил среднюю школу с медалью, $B$ – победитель областной олимпиады, $C$ – выпускник лицея. Опишите события $A \cap \overline{B} \cap C$, $A \setminus (A \cap B)$. При каком условии будет справедливо равенство $A \cap B \cap C = A$? Провертье справедливость соотношения $A \cap C \subseteq B$.

**1.6.** Бросается игральный кубик. Найдите вероятность того, что появившееся число очков кратно 3.

**1.7.** Игральный кубик бросается дважды. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков не превосходит 4.

**1.8.** Среди $n$ лотерейных билетов $k$ выигрышных. Наудачу взяли $m$ билетов. Определите вероятность того, что среди них $l$ выигрышных.

**1.9.** Случайным образом $k$ человек рассаживаются за круглым столом ($k > 2$). Найдите вероятность того, что 2 фиксированных лица $A$ и $B$ окажутся рядом.

**1.10.** Определите вероятность того, что серия наудачу выбранной облигации не содержит одинаковых цифр, если номер серии может быть любым 5-значным числом, начиная с 00001.

**1.11.** На 10 карточках написаны буквы А, А, А, М, М, Т, Т, Е, И, К. После перестановки вынимают наугад одну карточку за другой и раскладывают их в том порядке, в каком они были вынуты. Найдите вероятность того, что на карточках будет написано слово «МАТЕМАТИКА».

**1.12.** Телефонный номер в г. Гродно – из 6 цифр. Найдите вероятность того, что все цифры различны.

**1.13.** Какова вероятность того, что 4-значный номер случайно взятого автомобиля в г. Гродно имеет все различные цифры?

**1.14.** В лифт 12-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом этаже, начиная со второго. Найдите вероятность того, что все пассажиры выйдут: а) на одном и том же этаже; б) на восьмом этаже.

**1.15.** На полке в случайном порядке расставлено 20 книг, среди которых находится трехтомник Я. Купалы. Найдите вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания слева направо (но не обязательно рядом).

**1.16.** Некоторые жители г. Гродно и других городов 6-значный номер троллейбусного или автобусного билета считают «счастливым», если сумма первых его 3 цифр совпадает с суммой последних 3 цифр. Найдите вероятность получить «счастливый» билет.

**1.17.** Рассмотрим множество $\mathcal{F}$ кусочно-линейных функций вида

$$f(0); f(x) = f(i) + \alpha_i(x - i); \; i \leqslant x \leqslant i + 1; \; 0 \leqslant i \leqslant n - 1,$$

где $\alpha_i$ принимает значения 1 или –1. Найдите вероятность того, что: а) наудачу выбранная функция из множества $\mathcal{F}$ принимает в точке $n$ значение $k$; б) наудачу выбранная функция из $\mathcal{F}$ имеет в полуинтервале $(0, n]$ $i$ корней; в) для случайно выбранной функции $f \in \mathcal{F}$

$$\int_0^n f(x)dx = 0.$$

**1.18.** В партии, состоящей из $N$ изделий, имеется $k$ дефектных. В процессе приемного контроля из партии выбирается $n$ изделий. Найдите вероятность того, что из них ровно $m$ изделий будут дефектными.

**1.19.** Из 30 экзаменационных вопросов студент знает 20. Какова вероятность того, что он правильно ответит на 2 вопроса из 2?

**1.20.** В $N$ ячейках случайно размещены $n$ частиц. Чему равна вероятность того, что в $i$-ю ячейку попало $n_i$ частиц?

**1.21.** Из колоды карт (52 карты) наугад вынимают 3 карты. Найдите вероятность того, что это будут тройка, семерка и туз.

**1.22.** Из колоды карт (52 карты) наугад вынимают 6 карт. Определите вероятность того, что среди этих карт: а) будет дама пик; б) будут карты всех мастей.

**1.23.** Полная колода карт (52 карты) делится пополам. Найдите вероятность того, что: а) число черных и красных карт в обеих половинах будет одинаковым (по 13); б) в каждой половине будет по 2 туза.

**1.24.** Из колоды в 36 карт наугад выбираются 4. Найдите вероятность того, что среди них окажется хотя бы один туз.

**1.25.** Найдите вероятность того, что в группе из 25 студентов найдутся по меньшей мере 2 студента, которые имеют общий день рождения.

**1.26.** На Древней Руси существовало следующее гадание. Девушка держала в руке 6 травинок так, чтобы они торчали сверху и снизу. Ее подруга попарно связывала травинки сверху и снизу. Если при этом все травинки образовывали кольца, то это означало, что девушка в текущем году выйдет замуж. Какова вероятность того, что все 6 травинок образуют кольца?

**1.27** (*задача Стефана Банаха*). Некоторый математик носит при себе 2 коробка спичек. Каждый раз, когда ему нужна спичка, он выбирает наугад один из коробков. Найдите вероятность того, что когда математик впервые вынимает пустой коробок, то в другом коробке останется $r$ спичек, $r = 0, 1, \ldots, n$, где $n$ – количество спичек, которое было первоначально в каждом коробке.

**1.28.** В очереди, где продаются билеты по 5 дол., стоят $n$ человек. Какова вероятность того, что ни одному из покупателей не придется ждать сдачи, если перед началом продажи денег у кассира не было, а получение платы за каждый билет равновозможно как 5-долларовыми, так и 10-долларовыми купюрами?

**1.29.** В лотерее 100 билетов, среди них один выигрыш в 50 дол., 3 выигрыша – по 25 дол., 6 выигрышей – по 10 дол. и 15 выиграшей – по 3 дол. Найдите вероятность какого-нибудь выигрыша при покупке 3 лотерейных билетов. Что вероятнее: выиграть не менее 25 дол. или не более 25 дол. при покупке одного лотерейного билета?

**1.30.** В лотерее $k$ билетов, из них $m$ выигрышных. Найдите вероятность одного выигрыша для лица, имеющего $k$ билетов.

**1.31.** Пусть эксперимент состоит в проведении голосования по стратегии развития компании собранием из $K$ членов. Каждый сотрудник может голосовать «за», «против» или воздержаться от голосования. Найдите число элементарных событий в $\Omega$, если голосование является: а) открытым; б) тайным. Если в процессе обсуждения сотрудники могут менять свое мнение, то сколько элементов содержит $\Omega$ в том случае, если голосование проводится дважды (двумя способами)?

**1.32*.** Три письма случайно раскладываются по 3 конвертам с адресами. Найдите вероятность того, что хотя бы одно письмо попадет в свой конверт.

**1.33*.** Покажите, что из чисел $1, 2, \ldots, N$ можно составить $N^n$ $(n < N)$ различных последовательностей $\omega = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, из которых $N(N-1)\cdot\ldots\cdot(N-n+1)$ последовательностей состоят из различных чисел: $i_k \neq i_m$ при $k \neq m$.

**1.34*.** Пусть $n$ человек выстраиваются случайным образом в очередь. Какова вероятность, что между $X$ и $Y$ будут стоять ровно $r$ человек?

**1.35*.** Установите тождество $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$, разбивая все сочетания из $n$ элементов по $k$ на содержащие и не содержащие некоторый фиксированный элемент.

**1.36*.** Покажите, что имеется $C_n^k$ строчек $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ из 0 и 1, содержащих равно $k$ единиц. Выведите отсюда тождество

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

**1.37** (*генуэзская лотерея*). Из общего количества 90 номеров разыгрывается 5 номеров. Можно заранее сделать ставку на любое количество номеров в пределах 5. Если ставка сделана на $k$ номеров, $k = 1, 2, 3, 4, 5$, и именно эти $k$ номеров находятся среди номеров, вышедших в тираж, то соответствующие выигрыши таковы: если $k = 1$ – 15 ставок; $k = 2$ – 270 ставок; $k = 3$ – 5500 ставок; $k = 4$ – 75 000 ставок; $k = 5$ – 1 000 000 ставок. Найдите вероятности выигрышей при ставке на любое количество номеров.

## 1.4. Геометрическое и аксиоматическое определение вероятности

Геометрическая вероятность является расширением понятия классической вероятности на случай несчетного множества элементарных событий. В случае, когда $\Omega$ – несчетное множество, вероятность определяется не на элементарных событиях, а на их множествах.

**Определение** (*геометрическое*). Пусть равновозможные элементарные события $\omega$ являются точками $\Omega$ – ограниченного множества $n$-мерного евклидова пространства, имеющего меру Лебега $\mu(\Omega)$. Рассмотрим систему $\mathcal{A}$ измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega$. Для любого случайного события $A \in \mathcal{A}$ его вероятностью назовем число

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

где $\mu(A)$ – мера Лебега – действительная, неотрицательная, счетно-аддитивная функция множеств, т.е. такая, что: а) $\mu(A)\geqslant 0$; б) $\mu(\varnothing)=0$; в) $A\subseteq B\Rightarrow\mu(A)\leqslant\mu(B)$; г) $A\bigcap B=\varnothing\Rightarrow\mu(A\bigcup B)=$ $=\mu(A)+\mu(B)$ (в частных случаях это длина, площадь, объем).

***Пример 1.3.*** На одной стороне ленты магнитофонной кассеты длиной 10 м записан гимн студентов-математиков Беларуси длиной 2 м, а на другой – 14-я соната Бетховена длиной 3 м, причем их местоположение неизвестно. Случайным образом с обеих сторон ленты был поврежден (стерт) участок длиной 1 м, начинающийся на расстоянии 5 м от начала ленты. Необходимо найти вероятности следующих событий: $A=$ {гимн и соната не повреждены}, $B=$ {гимн поврежден, а соната – нет}, $C=$ {соната повреждена, а гимн – нет}, $D=$ {и гимн, и соната повреждены}.

*Решение.* Из того, что положение гимна и сонаты совершенно неизвестно, делаем предположение, что любое положение начала каждого из них, при котором они вмещаются на соответствующих сторонах ленты, столь же правдоподобно, как и любое другое. Пусть $x$ – абсцисса начала записи гимна, $y$ – сонаты. Пространство элементарных событий

$$\Omega=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 10-2,\ \ 0\leqslant y\leqslant 10-3\}\ –$$

прямоугольник с площадью $\mu(\Omega)=8\times 7=56$ м$^2$. На рис. 1.2 разными видами штриховки отмечены области, соответствующие повреждению гимна и сонаты, буквами $A, B, C, D$ – области, соответствующие каждому из событий $A, B, C, D$. Используя геометрическое определение вероятности, можно легко найти вероятности этих событий, например

$$P(D)=\frac{\mu(D)}{\mu(\Omega)}=\frac{3\cdot 4}{56}=\frac{3}{14}.$$

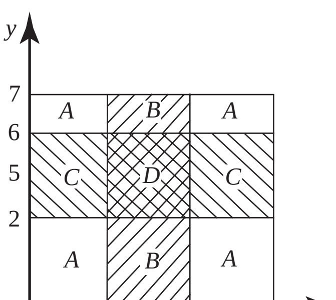

*Рис. 1.2.* Области, соответствующие повреждению гимна и сонаты

До сих пор рассматривались случаи, когда мера множества $\Omega$ была ограниченной и все элементарные события равновозможны. Рассмотрим теперь определение вероятности, свободное от данных ограничений. При этом в основе лежит идея определения вероятности как неотрицательной, нормированной и счетно-аддитивной функции множеств, являющихся событиями, т.е. $P(A)$, где $A \subseteq \Omega$. Совокупность подмножеств из $\Omega$, на которых может быть определена вероятностная функция, должна быть построена специальным образом.

События, имеющие вероятность, образуют σ-алгебру (борелевское поле), т.е. множество $\mathcal{F}$ подмножеств $\Omega$, удовлетворяющее следующим свойствам:

$$\Omega \in \mathcal{F}; \;\; A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{F};$$

$$A_k \in \mathcal{F},\; k = 1, 2, \ldots \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F} \left( \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F} \right).$$

Простейшими примерами σ-алгебр являются: тривиальная σ-алгебра $\mathcal{F}$, состоящая из двух событий ($\Omega$, $\varnothing$), где $\varnothing$ – невозможное событие; σ-алгебра $\mathcal{F}$, состоящая из всех событий. Подмножества пространства $\Omega$, которые не принадлежат выбранной σ-алгебре, не являются случайными событиями.

***Пример 1.4.*** Пусть $\Omega = \{\omega : \omega \in [0, 1]\}$, $A = \left\{\omega : \omega \in \left[0, \frac{2}{3}\right]\right\}$, $B = \left\{\omega : \omega \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]\right\}$. Необходимо описать σ-алгебру событий $\mathcal{F}$ на $\Omega$, порожденную событиями $A$ и $B$.

*Решение.* Используя определение σ-алгебры, получаем, что σ-алгебру событий $\mathcal{F}$ образуют следующие события (так как здесь $A \cup B = \Omega$, $\bar{A} \cap \bar{B} = \varnothing$):

$$\varnothing, \Omega = \{\omega : \omega \in [0, 1]\},\; A = \left\{\omega : \omega \in \left[0, \frac{2}{3}\right]\right\},\; B = \left\{\omega : \omega \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]\right\};$$

$$\bar{A} = \left\{\omega : \omega \in \left(\frac{2}{3}, 1\right]\right\}, \bar{B} = \left\{\omega : \omega \in \left[0, \frac{1}{3}\right)\right\}, A \cap D = \left\{\omega : \omega \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]\right\};$$

$$\bar{A} \cup \bar{B} = \left\{\omega : \omega \in \left\{\left[0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right]\right\}\right\}.$$

**Определение** (*аксиоматическое*). Вероятностью $P$, определенной на σ-алгебре событий $\mathcal{F}$, называется числовая функция $P(A)$, $A \in \mathcal{F}$, удовлетворяющая:

а) аксиоме 1 – $\forall\ A \in \mathcal{F}, P(A) \geqslant 0$;

б) аксиоме 2 – $P(\Omega) = 1$;

в) аксиоме 3 – $A_i \bigcap A_k = \varnothing, i \neq k \Rightarrow P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P(A_k)$.

Из данного определения следует, что $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ и вероятность является нормированной мерой, т.е. мерой, для которой выполняется условие нормировки 2 (аксиома 2).

**Определение.** Совокупность ($\Omega$, $\mathcal{F}$, $P$) называется *вероятностным пространством*.

Эквивалентным аксиоме 3 является требование аддитивности для конечного множества событий $A_k$ и следующие аксиомы непрерывности (та или иная):

а) пусть случайные события $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots \in \mathcal{F}$ таковы, что

$$B_{k+1} \subset B_k, \ \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = B, \text{ тогда } \lim_{n\to\infty} P(B_n) = P(B);$$

б) пусть $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots \in \mathcal{F}$ и $B_k \subset B_{k+1}, \ \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k = B$, тогда также $\lim\limits_{n\to\infty} P(B_n) = P(B)$.

Покажем, что из аксиомы 3 при выполнении вышеуказанного условия следует аксиома непрерывности б) и наоборот. Пусть верна аксиома 3 и $B_k \subset B_{k+1}$. Тогда

$$B_n = B_n \bigcap \Omega = B_n \bigcap (\bar{B}_{n-1} \bigcup B_{n-1}) = (B_n \bigcap \bar{B}_{n-1}) \bigcup (B_n \bigcap B_{n-1}) =$$

$$= (B_n \bigcap \bar{B}_{n-1}) \bigcup B_{n-1} = \ldots = \bigcup_{k=1}^{n} (B_k \bigcap \bar{B}_{k-1}),$$

при этом предполагается, что $B_0 = 0$. Таким образом, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k = \bigcup\limits_{k=1}^{n} (B_k \bigcap \bar{B}_{k-1})$, причем $(B_k \bigcap \bar{B}_{k-1}) \bigcap (B_i \bigcap \bar{B}_{i-1}) = 0, k \neq i$. Итак,

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k = \bigcup_{k=1}^{n} (B_k \bigcap \bar{B}_{k-1});$$

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (B_k \bigcap \bar{B}_{k-1}).$$

Используя аксиому 3, получаем:

$$P(B_n) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k \bigcap \bar{B}_{k-1});$$

$$P(B) = \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k \bigcap \bar{B}_{k-1}),$$

откуда следует, что $\lim_{n\to\infty} P(B_n) = P(B)$.

Пусть теперь справедлива аксиома непрерывности б). Предположим, что $A_k \in \mathcal{F}$, $k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$, и $A_k \cap A_j = \varnothing, k \neq j$. Определим $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Ясно, что $B_n \subseteq B_{n+1}$. Определим также

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_k\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_k.$$

Из аксиомы непрерывности б) следует, что

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_k\right) = P(B) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_k\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(A_n) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_n),$$

откуда вытекает аксиома 3.

## Задачи к § 1.4

**1.38.** Два студента имеют одинаковую вероятность прийти к указанному месту в любой момент промежутка времени *T*. Определите вероятность того, что время ожидания одним другого будет не больше *t*.

**1.39.** По маршруту независимо друг от друга ходят 2 автобуса: № 20 – через 10 мин, № 15 – через 7 мин. Студент приходит на остановку в случайный момент времени. Какова вероятность, что ему придется ждать автобуса менее 3 мин?

**1.40.** Дано уравнение $x^2 + ax + b = 0$. Известно, что $0 \leqslant a \leqslant 1$, $0 \leqslant b \leqslant 1$, причем вероятность попадания каждого из чисел *a* и *b* в какой-либо интервал отрезка $[0, 1]$ пропорциональна длине интервала и не зависит от его положения относительно отрезка $[0, 1]$. Найдите вероятность того, что данное уравнение имеет действительные корни.

**1.41.** Найдите вероятность того, что сумма 2 наудачу взятых положительных правильных дробей не больше 1, а их произведение не больше $\frac{3}{16}$.

**1.42.** На отрезке $[0, 1]$ случайным образом выбираются 2 точки. Какова вероятность того, что из отрезков, полученных разбиением отрезка $[0, 1]$ этими точками, можно построить треугольник?

**1.43** (*задача Бюффона*). На плоскость, разграфленную параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2L$, бросается игла длиной $2l$, $l \leqslant L$. Найдите вероятность того, что игла пересечет прямую.

**1.44.** Два танкера должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих танкеров равновозможно в течение одних суток. Найдите вероятность того, что одному из танкеров придется ждать освобождения причала, если время разгрузки первого танкера — 3 ч, а второго — 4 ч.

**1.45.** Два судна плывут в тумане: одно идет вдоль пролива шириной $L$, а другое курсирует без остановок поперек этого пролива. Скорости движения судов равны $v_1$ и $v_2$ соответственно. Второе судно подает звуковые сигналы, которые слышны на расстоянии $l < L$. Определите вероятность того, что на первом судне услышат сигналы, если пересечение курсов судов равновозможно в любом месте пролива.

**1.46.** В квадрате с вершинами (0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 0) наугад выбирают точку $M$, пусть $(\xi, \eta)$ — ее координаты. Будем считать, что вероятность попадания в область, которая лежит в квадрате, зависит только от площади этой области и пропорциональна ей. Докажите, что для $0 \leqslant x, y \leqslant 1$ $P\{\xi \leqslant x, \eta \leqslant y\} = P\{\xi \leqslant x\} \times$ $\times P\{\eta \leqslant y\} = xy$.

**1.47.** Исходя из условия задачи 1.46, для $0 < z < 1$ найдите:

а) $P\{|\xi - \eta| \leqslant z\}$; б) $P\{\xi\eta \leqslant z\}$; в) $P\left\{\dfrac{\xi+\eta}{2} \leqslant z\right\}$; г) $P\{\min(\xi, \eta) \leqslant z\}$; д) $P\{\max(\xi, \eta) \leqslant z\}$.

**1.48.** В круге радиусом $R$ наудачу выбирают точку. Вероятность попадания точки в некоторую область круга пропорциональна площади этой области. Определите вероятность того, что: а) точка находится от центра на расстоянии меньшем, чем $r$, $r < R$; б) меньший угол между заданным направлением и прямой, которая соединяет точку с началом координат, будет не больше, чем $\alpha$.

**1.49.** На окружности радиусом 1 и с центром в начале координат наудачу выбирают точку. Вероятность выбора точки на некоторой дуге окружности зависит только от длины этой дуги и пропорциональна ей. Найдите вероятность того, что: а) проекция точки на диаметр находится от центра на расстоянии не большем, чем $r$, $r < 1$; б) расстояние от выбранной точки до точки с координатами (1, 0) не больше, чем $r$.

**1.50.** Спутник Земли двигается по орбите, которая заключена между 60° северной и 60° южной широты. Найдите вероятность того, что спутник упадет выше 30° северной широты, если считать равновозможным падение спутника в любую точку поверхности Земли между указанными параллелями.

**1.51.** Слой воздуха толщиной $H$ задерживает пылинки радиусом $r$ в количестве $\lambda$ штук в одной кубической единице. Найдите вероятность того, что луч света, перпендикулярный слою, не пересечет ни одной пылинки.

**1.52.** На круглом экране радиолокатора радиусом $r$ имеется точечное отображение объекта, которое занимает случайное положение в границах экрана, причем ни одна зона в границах не имеет преимущества перед другой. Найдите вероятность того, что расстояние от точки объекта до центра экрана будет меньше, чем $\frac{r}{2}$.

**1.53.** Самолет с радиолокационной станцией, дальность действия которой $L$, в районе площадью $s$ осуществляет поиск подводной лодки со скоростью $v$. Лодка может всплыть в любой точке района на время $t$. Найдите вероятность обнаружения подводной лодки радиолокатором, если время $t$ невелико.

**1.54.** Имеются две параллельные линии связи длиной $l$, расстояния между которыми $d < l$. Известно, что на каждой линии где-то есть разрыв, но неизвестно, в каком месте. Найдите вероятность того, что расстояние $r$ между точками разрыва не больше, чем $a$ ($d < a < \sqrt{l^2 + d^2}$).

**1.55.** Поезда метро идут в данном направлении с интервалом 2 мин. Какова вероятность того, что пассажиру доведется ждать поезда не больше, чем 30 с?

**1.56.** Концентрация доходов различных социальных групп изображается кривой Лоренца. Пусть наудачу выбираются социальные слои, суммарная доля $x$ которых от всего населения изменяется в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$, а суммарный относительный доход $y$ изменяется соответственно в интервале $0 \leqslant y \leqslant x$. Найдите вероятность события, состоящего в том, что наудачу выбранная часть населения будет иметь относительный доход, удовлетворяющий соотношению $x^2 \leqslant y \leqslant x$.

**1.57.** Состояние работы банка за сутки характеризуется суммарной величиной $d_1$ вкладов от индивидуальных вкладчиков и не зависящей от нее величиной $d_2$ вкладов от фирм. Работа банка оценивается его правлением успешно, если $d_1 + d_2 > 0$ и выполняется пропорция вкладов: $d_1 + d_2 > d$, где $d > 0$ – за-данный коэффициент. Предполагая равновероятность значений $d_i \in \left[\underline{d}_i, \bar{d}_i\right]$, $i = 1, 2$, вычислите вероятность того, что итоги работы банка в течение суток успешны.

**1.58.** Пусть $\Omega = \{\omega : \omega \in [0, 1]\}$, $A = \left\{\omega : \omega \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right\}$, $B = \left\{\omega : \omega \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right\}$, $C = \left\{\omega : \omega \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]\right\}$, $D = \{\omega : \omega \in G\}$, где $G$ – множество всех рациональных чисел отрезка $[0, 1]$. Опишите σ-алгебру событий ω на Ω, порожденную событиями: а) $A$, $B$; б) $C$; в) $D$.

**1.59.** Может ли число всех событий какого-либо вероятностного пространства быть равным 129; 130; 128?

**1.60.** Число элементарных событий некоторого вероятностного пространства равно $n$. Укажите минимальное и максимальное возможные значения для числа событий.

**1.61.** Даны вероятности $p = P(A)$, $q = P(B)$, $r = P(A \cup B)$. Найдите вероятность следующих событий: $P(A \cap B)$, $P(\bar{A} \cap \bar{B})$, $P(A \cap \bar{B})$.

**1.62.** Пусть $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ – невозрастающая последовательность событий. Докажите, что

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n).$$

**1.63*** (*задача Бертрана*). На окружности радиусом $r$ наудачу выбираются 2 точки и соединяются хордой. Найдите вероятность того, что длина хорды превысит $\sqrt{3}r$.

**1.64*.** На окружности наудачу выбраны 3 точки $A$, $B$, $C$. Найдите вероятность того, что треугольник $ABC$ будет остроугольным.

**1.65*.** Пусть $A_1, A_2, \ldots; B_1, B_2, \ldots$ – две последовательности событий, причем $P(B_n) \to 1$ при $n \to \infty$. Докажите, что $\lim_{n \to \infty} P(A_n) = \lim_{n \to \infty} P(A_n \cap B_n)$ при условии, если хотя бы один из указанных пределов существует.

## 1.5. Свойства вероятности. Условная вероятность и независимость событий

**Свойства вероятности.** Приведем основные свойства вероятности:

а) $P(\varnothing) = 0$ следует из того, что $\varnothing \cup \Omega = \Omega$ и $P(\varnothing \cup \Omega) = P(\varnothing) + P(\Omega)$;

б) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, поскольку $A \cup \bar{A} = \Omega$ и $P(A \cup \bar{A}) = P(A) +$ $+ P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1$;

в) если $A \subseteq B$, то $P(A) \leqslant P(B)$, что следует из определения меры;

г) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, поскольку $A \cup B =$ $= A \cup (B \setminus (A \cap B))$;

д) $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$, что следует из предыдущего свойства; равенство будет, если $A \cap B = \varnothing$;

е) пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n \in F$, тогда

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) +$$

$$+ \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n).$$

При $n = 2$ последнее соотношение следует из свойства б):

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2),$$

Далее его доказательство можно провести по индукции. Предположим, что оно справедливо для произвольных $(n-1)$ событий $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$. Тогда, обозначив $B = \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i$, получим:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(B \cup A_n) = P(B) + P(A_n) - P(A_n \cap B).$$

Подставляя сюда $P(B) = P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i\right)$,

$$P(A_n \cap B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_n)\right),$$

будем иметь требуемое соотношение.

**Условная вероятность и независимость событий. Определение.** Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и $A, B \in \mathcal{F}$. Предположим, что $P(B) > 0$. Условной вероятностью события $A$ при условии, что произошло событие $B$, называется отношение вероятности $P(A \cap B)$ к $P(B)$ и обозначается $P(A/B)$, т.е.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Условная вероятность обладает следующими свойствами:

а) если $B \subseteq A$, то $P(A/B) = 1$, так как в этом случае $A \cap B = B$;

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

**Матальцкий** Михаил Алексеевич
**Хацкевич** Геннадий Алексеевич

**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА**

Учебник

Редактор *И.В. Тургель*
Художественный редактор *Т.В. Шабунько*
Технический редактор *Н.А. Лебедевич*
Корректор *Т.К. Хваль*
Компьютерная верстка *А.Н. Бабенковой*

Подписано в печать 04.07.2017. Формат 84×108/32. Бумага офсетная.
Гарнитура «NewtonC». Офсетная печать. Усл. печ. л. 31,08.
Уч.-изд. л. 27,8. Тираж 400 экз. Заказ 1962.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Вышэйшая школа”».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/3 от 08.07.2013.
Пр. Победителей, 11, 220004, Минск.
e-mail: market@vshph.com http://vshph.com

Открытое акционерное общество «Типография “Победа”».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 2/38 от 29.01.2014.
Ул. Тавлая, 11, 222310, Молодечно.