



СТУДЕНТЫ
ПРОЦЕДУРЫ
НАЧАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ Практикум



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ Практикум

Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов
учреждений высшего образования
по математическим, физическим и
экономическим специальностям



МИНСК
«ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»
2012

УДК 517.9(075.9)

ББК 22.161.6я73

Д50

А в т о р ы: Л.А. Альсевич, С.А. Мазаник, Г.А. Расолько, Л.П. Черенкова

Р е ц е н з е н т ы: кафедра дифференциальных уравнений и теории функций Гомельского государственного университета (заведующий кафедрой доктор физико-математических наук, доцент *А.П. Старовойтов*); заведующий кафедрой высшей математики Белорусского государственного экономического университета доктор физико-математических наук, профессор *М.П. Дымков*

Все права на данное издание защищены. Воспроизведение всей книги или любой ее части не может быть осуществлено без разрешения издательства.

ISBN 978-985-06-2111-5

© Издательство «Вышэйшая школа», 2012

Пособие подготовлено в соответствии с программой курса дифференциальных уравнений для студентов, специализирующихся по прикладной математике. Оно будет полезно также студентам математических, физических, экономических факультетов университетов и технических вузов. Построено пособие так, чтобы выработать у учащихся практические навыки решения и исследования дифференциальных уравнений и систем, описывающих эволюционные процессы в различных областях естествознания.

Расположение материала, операторный подход к изложению теории линейных стационарных дифференциальных уравнений и стационарных линейных векторных уравнений, методика изучения элементарных уравнений как уравнений, приводимых к уравнениям в полных дифференциалах, отличают данное пособие от традиционных. Изучение линейных уравнений со стационарным оператором позволяет уже в начале курса рассматривать приложения дифференциальных уравнений к теории колебаний, которая в свою очередь знакомит студентов с качественной теорией дифференциальных уравнений, развивает у них исследовательские навыки. В пособии представлены задания для контрольных и лабораторных работ, а также варианты тестовых заданий по отдельным темам курса.

Наряду с широко известными методами интегрирования линейных стационарных систем дифференциальных уравнений (методы Коши, Лагранжа, Д'Аламбера, экспонентное представление решения) предлагается операторный метод сведения системы к системе независимых уравнений и метод построения экспоненты матрицы, не требующий знания жордановой формы матрицы.

Пособие составлено на основании опыта проведения практических и лабораторных занятий по курсу дифференциальных уравнений на факультете прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета. По структуре и методике изложения материала оно связано с книгами Ю.С. Богданова, Ю.Б. Сыроида «Дифференциальные уравнения» (Минск: Вышэйшая школа, 1983) и Ю.С. Богданова, С.А. Мазаника, Ю.Б. Сыроида «Курс дифференциальных уравнений» (Мінск: Універсітэцкае, 1996). Настоящее издание является продолжением наших книг «Практикум по дифференциальным уравнениям» (Минск: Вышэйшая школа, 1990; Минск: БГУ, 2000), поэтому мы сохранили нумерацию задач, а для новых задач используется двойная нумерация. Наряду с задачами, составленными авторами, в практикуме приведены стандартные задачи из известных сборников задач по дифференциальным уравнениям.

В практикум включен ряд примеров решения задач с использованием пакета компьютерной математики MathCad. Это дополнение вызвано тем, что рассматриваемые методы интегрирования и их применение основаны на четких и понятных алгоритмах, однако практическое их использование часто требует от студентов выполнения большого объема вычислений и аналитических преобразований. Широкие возможности, которыми обладают в этом плане современные системы компьютерной математики, позволяют в определенной мере решить эту проблему. Применение пакетов

компьютерной математики в процессе обучения не является самоцелью и никоим образом не может полностью заменить традиционные методы обучения. Тем не менее использование таких пакетов на практических занятиях по дифференциальным уравнениям позволяет не только находить аналитические или численные решения дифференциальных уравнений, но и осуществить визуализацию полученных результатов, что облегчает восприятие студентами материала, дает возможность на занятиях рассмотреть гораздо больше примеров, больше времени уделить качественному анализу получаемых результатов. Отметим, что в силу специфики пакета MathCad многие символьные вычисления занимают в строке документа несколько рядом расположенных страниц и при их внедрении в книгу некоторые части вычислений не видны. Однако при работе на компьютере по приведенному в тексте листингу информация восстанавливается в полном объеме.

Авторы выражают глубокую признательность член-корреспонденту Национальной академии наук Беларуси профессору Ф.М. Кирилловой, профессорам А.Ф. Андрееву, М.П. Дымкову, Г.А. Медведеву, В.И. Мироненко и доценту Н.Т. Стельмашуку за рецензии, советы и замечания, способствовавшие улучшению наших книг.

Все отзывы и пожелания просим присылать по адресу: 220050, Минск, проспект Ф. Скорины, 4, кафедра высшей математики, факультет прикладной математики и информатики, Белорусский государственный университет.

Авторы

I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Дифференциальное уравнение. Порядок уравнения. Решения уравнения

Дифференциальное уравнение для определения функции $x = x(t)$ имеет вид

$$F(t, x, Dx, D^2x, \dots, D^n x) = 0, \quad (1.1)$$

где F – заданная функция своих аргументов; D – оператор дифференцирования по t , т.е. оператор, действующий по следующим правилам:

$$D^0 x = x, \quad Dx = \frac{dx}{dt}, \quad D^{k+1}x = D(D^k x) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^k x}{dt^k} \right) = \frac{d^{k+1}x}{dt^{k+1}}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

Искомая функция $x = x(t)$ зависит от одного аргумента t и считается заданной на связном множестве (промежутке). Рассматриваемое уравнение называют *обыкновенным*. Обыкновенное дифференциальное уравнение может быть записано также с помощью дифференциалов искомой функции и независимой переменной

$$H(t, x, dx, d^2x, \dots, d^n x) = 0, \quad (1.3)$$

где H – заданная функция своих аргументов.

Порядком уравнения называют порядок старшей из производных или старшего из дифференциалов искомой функции, входящих в уравнение.

Решением уравнения называют функцию $x = x(t)$, которая задана на промежутке $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, имеет все производные до порядка n включительно и обращает на промежутке I уравнение в тождество

$$F(t, x(t), Dx(t), D^2x(t), \dots, D^n x(t)) \equiv 0 \quad \forall t \in I \quad (1.4)$$

(здесь под $|a, b|$ понимается один из промежутков: $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq +\infty$).

Задача 1.1. Определить, какие из приведенных функций x являются на соответствующем множестве I решениями уравнения $D^2x + 4x = 1/\cos 2t$:

- а) $x = 1/4 \cos 2t \ln \cos 2t + t/2 \sin 2t$, $I = (-\pi/4, \pi/4)$;
- б) $x = 1/4 \cos 2t \ln |\cos 2t| + t/2 \sin 2t$, $I = (\pi/4, 3\pi/4)$;
- в) $x = 1/4 \cos 2t \ln |\cos 2t| + t/2 \sin 2t$, $I = (0, \pi/2)$;
- г) $x = 1/4 \cos 2t \ln \cos 2t + t/2 \sin 2t$, $I = (-\pi/4, \pi/4) \cup (7\pi/4, 9\pi/4)$;
- д) $x = \cos 2t + \sin 2t$, $I = (7\pi/4, 9\pi/4)$.

Решение. а) Функция $f(t) = 1/\cos 2t$ определена и непрерывна на заданном интервале $I = (-\pi/4, \pi/4)$. Непосредственной подстановкой

$$x = 1/4 \cos 2t \ln \cos 2t + t/2 \sin 2t, \quad Dx = t \cos 2t - 1/2 \sin 2t \ln \cos 2t, \\ D^2x = -\cos 2t \ln \cos 2t - 2t \sin 2t + 1/\cos 2t$$

в данное уравнение убеждаемся, что оно обращается в тождество на $I = (-\pi/4, \pi/4)$. Следовательно, заданная функция x является решением уравнения.

б) Поскольку $\cos 2t$ на интервале $I = (\pi/4, 3\pi/4)$ отрицателен и $|\cos 2t| = -\cos 2t$, то функцию x запишем в виде $x = 1/4 \cos 2t \ln(-\cos 2t) + t/2 \sin 2t$. Функция $1/\cos 2t$ определена и непрерывна на I , функция x дважды дифференцируема на I . Непосредственной подстановкой

$$x = 1/4 \cos 2t \ln(-\cos 2t) + t/2 \sin 2t, \quad Dx = -1/2 \sin 2t \ln(-\cos 2t) + t \cos 2t, \\ D^2x = -\cos 2t \ln(-\cos 2t) - 2t \sin 2t + 1/\cos 2t$$

в данное уравнение убеждаемся, что оно обращается в тождество на $I = (\pi/4, 3\pi/4)$. Следовательно, функция x является решением уравнения.

в) Считать функцию x решением заданного уравнения на промежутке $I = (0, \pi/2)$ нельзя, так как она не дифференцируема на I и правая часть уравнения $f(t) = 1/\cos 2t$ разрывна на I .

г) Согласно определению решения дифференциального уравнения, функция, заданная на множестве $I = (-\pi/4, \pi/4) \cup (7\pi/4, 9\pi/4)$, не является решением, так как в данном случае множество I не является промежутком, т.е. не является связным.

д) Функция $f(t) = 1/\cos 2t$ определена и непрерывна на заданном интервале $I = (7\pi/4, 9\pi/4)$. Подставив в исходное уравнение

$$x = \cos 2t + \sin 2t, \quad Dx = -2\sin 2t + 2\cos 2t, \quad D^2x = -4\cos 2t - 4\sin 2t,$$

будем иметь $0 = 1/\cos 2t$. Это означает, что функция x не является решением данного уравнения.

Определить, какие из приведенных функций являются решениями указанного уравнения на заданном множестве:

1. $x = t Dx + t e^{x/t}$:

а) $x = -t \ln \ln t, \quad I = (0, +\infty)$;

в) $x = -t \ln \ln t, \quad I = [1, +\infty)$;

б) $x = -t \ln \ln t, \quad I = (1, +\infty)$;

г) $x = \ln t, \quad I = (0, +\infty)$.

2. $D^2x - 2Dx + x = \frac{e^t}{t}$:

а) $x = e^t \ln t, \quad I = (0, +\infty)$;

в) $x = t e^t \ln t, \quad I = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

б) $x = t e^t \ln t, \quad I = (0, +\infty)$;

г) $x = e^t (t \ln |t| + t), \quad I = (-\infty, 0)$.

3. $(2t+1)x'' + 4tx' - 4x = 0$:

а) $x = t + e^{-2t}, \quad I = (-2, -1) \cup (1, 2)$;

в) $x = C_1 t + C_2 e^{-2t}, \quad I = \mathbb{R}$,

б) $x = e^{2t}, \quad I = \mathbb{R}$;

C_1, C_2 – постоянные;

г) $x = t, \quad I = \mathbb{R}$.

4. $x' = \frac{1}{2}\sqrt{t} + \sqrt[3]{x}$:

а) $x = t^{3/2}, \quad I = [0, +\infty)$;

в) $x = 1 + t^{3/2}, \quad I = [0, +\infty)$;

б) $x = |t|^{3/2}, \quad I = (-\infty, 0)$;

г) $x = -t^{3/2}, \quad I = [0, +\infty)$.

5. $D^2x + \frac{\arctg \sqrt{t}}{\cos t} Dx + x = \arctg \sqrt{t}$:

а) $x = \sin t, \quad I = [0, \pi/2)$;

в) $x = t \sin t, \quad I = [0, +\infty)$;

б) $x = t \sin t, \quad I = [0, \pi/2)$;

г) $x = \sin t, \quad I = [0, \pi/2)$.

6. $t^2 D^2x + t Dx + 2x = 2 \cos \ln t + \sin \ln t$:

а) $x = \sin \ln t + \cos(\sqrt{2} \ln t), \quad I = (-\infty, 0)$;

- б) $x = 1/2 \cos \ln t + \sin \ln t, \quad I = (0, +\infty);$
 в) $x = 1/2 \cos \ln t + \sin \ln t + \cos(\sqrt{2} \ln t), \quad I = (0, +\infty);$
 г) $x = 1/2 \cos \ln t + \sin \ln t + 2 \sin(\sqrt{2} \ln t), \quad I = (0, +\infty).$

7. $D^3 x + Dx = \sin t / \cos^2 t:$

- а) $x = 1 / \cos t + \cos t \ln \cos t + (t - \operatorname{tg} t) \sin t, \quad I = (-\pi / 2, \pi / 2);$
 б) $x = 1 + \cos t + \sin t, \quad I = (-\pi / 2, \pi / 2);$
 в) $x = \cos t \ln \cos t + (t - \operatorname{tg} t) \sin t + \frac{1}{\cos t}, \quad I = (-\pi / 2, \pi / 2) \cup (3\pi / 2, 5\pi / 2).$

Показать, что функции $x = x(t)$, зависящие от произвольных постоянных $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$, являются решениями соответствующих уравнений. Указать максимальный промежуток существования решения:

8. $x = C_1 e^{C_2 t}, \quad x D^2 x = (Dx)^2.$
 9. $x = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t, \quad D^2 x + 9x = 0.$
 10. $x = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t + \frac{t}{9}, \quad D^2 x + 9x = t.$
 11. $x = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t + e^{3t}, \quad D^2 x + 9x = 18e^{3t}.$
 12. $x = C_1 / t + C_2, \quad tx'' + 2x' = 0.$
 13. $x = C_1 t + C_1^2, \quad x = tDx + (Dx)^2.$
 14. $x = C_1 t + \sin C_1, \quad x = tDx + \sin Dx.$
 15. $x = C_1 t + \ln C_1, \quad x = tx' + \ln x'.$
 16. $x = C_1 \operatorname{ch} t + C_2 \operatorname{sh} t, \quad D^2 x - x = 0.$
 17. $x = C_1 \frac{t^2}{2} + C_1^2 t + C_2, \quad Dx = t D^2 x + (D^2 x)^2.$
 18. $x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t, \quad D^4 x - x = 0.$
 19. Доказать, что многочлены Чебышева первого рода

$$T_m(t) = \cos(m \arccos t) / 2^{m-1}, \quad m \in \mathbb{N},$$

удовлетворяют уравнениям $(1 - t^2) D^2 x - tDx + m^2 x = 0, \quad m \in \mathbb{N}.$

Показать, что функции $x = x(t)$, заданные неявно, являются решениями соответствующих уравнений:

20. $x = \operatorname{arctg}(x + t) + C, \quad (x + t)^2 Dx = 1.$
 21. $t = x^2 + x, \quad Dx D^3 x - 3(D^2 x)^2 = 0.$
 22. $x \ln x - t - \int_0^t e^{\tau^2} d\tau = 0, \quad x(1 + \ln x)x'' + (x')^2 = 2txe^{t^2}.$
 23. $9x^2 - 4at^3 = 0, \quad (Dx)^2 - at = 0, \quad a \in \mathbb{R}.$

$$24. (x-t)(x^2-t^2+1)=0, \quad tx(Dx)^2-(t^2+x^2)Dx+tx=0.$$

$$25. (tx+1)(t^2x-1)=0, \quad (x')^2+\frac{3x}{t}x'+\frac{2x^2}{t^2}=0.$$

$$26. x^3-7t^2x+6t^3=0, \quad (Dx)^3-7Dx+6=0.$$

$$27. t^2+x+\ln x-\frac{t}{x}=C, \quad x>0, \quad (2tx^2-x)+(x^2+t+x)Dx=0.$$

$$28. x^4=4a^2t^2, \quad x^2(Dx)^2-a^2=0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

$$29. t^2+x^2=a^2, \quad x=tDx-a\sqrt{1+(Dx)^2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Показать, что функции $x=x(t)$, заданные параметрически, являются решениями соответствующих уравнений:

$$30. \begin{cases} t = \frac{\ln \tau}{2} + \frac{3}{4\tau^2}, \\ x = \frac{\tau}{4} + \frac{3}{4\tau^3}, \quad \tau > 0, \end{cases} \quad (D^2x)^2 - 2DxD^2x + 3 = 0.$$

$$31. \begin{cases} t = \frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{3p^2}, \\ x = \frac{2}{3p} - \sqrt{p}, \quad p > 0, \end{cases} \quad t(x')^2 + xx' - 1 = 0.$$

$$32. \begin{cases} t = \tau^{-2} \ln \tau, \\ x = \tau^{-1}(1 + 2 \ln \tau), \quad \tau > 0, \end{cases} \quad xDx - 2t(Dx)^2 - 1 = 0.$$

$$33. \begin{cases} t = 2(1-p) + e^{-p}, \\ x = 2 - p^2 + e^{-p}(1+p), \quad p \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad x = (1 + Dx)t + (Dx)^2.$$

$$34. \begin{cases} t = e^{-\varphi} \cos \varphi, \\ x = (1 + \sin 2\varphi)e^{-2\varphi}/4, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad 4x = (Dx + t)^2.$$

$$35. \begin{cases} t = e^{-\varphi}(1 + \varphi), \\ x = e^{-2\varphi}(1 + 2\varphi + 2\varphi^2)/4, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad 4x = (x')^2 + t^2.$$

$$36. \begin{cases} t = e^{-\varphi/2} \cos \varphi, \\ x = (2 + \sin 2\varphi)e^{-\varphi}/4, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad 2x = t^2 + tDx + (Dx)^2.$$

$$37. \begin{cases} t = \frac{p^3}{4} - \frac{p^2}{2}, \quad p \in \mathbb{R}, \\ x = 3\frac{p^4}{16} - \frac{p^3}{3}, \end{cases} \quad x = -\frac{(Dx)^3}{12} + \frac{t}{2}Dx + \frac{1}{4}(Dx)^2 + t + \frac{t^2}{(Dx)^2}.$$

$$37.1. \begin{cases} t = \sqrt{1 - \tau^2}, \\ x = \frac{1}{\tau}, \quad 0 < \tau < 1, \end{cases} \quad D^2 x - 2t x^2 D x = x^5.$$

$$37.2. \begin{cases} t = \sin \tau, \\ x = \frac{1}{\cos \tau}, \quad -\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad D^2 x - 2t x^2 D x = x^5.$$

$$37.3. \begin{cases} t = \operatorname{sh}^2 \tau, \\ x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \tau}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad D^2 x + 2x D x = 0.$$

Каждое дифференциальное уравнение имеет, вообще говоря, семейство решений, задаваемое формулой, содержащей произвольные постоянные.

Рассмотрим обратную задачу: построить дифференциальное уравнение по известному решению $x = x(t, C_1, \dots, C_n)$, заданному соотношением $\Phi(t, x, C_1, \dots, C_n) = 0$.

Дифференциальное уравнение, связывающее t и $x(t)$, получается путем исключения постоянных $C_1, \dots, C_n$ из системы

$$\begin{cases} \Phi(t, x, C_1, \dots, C_n) = 0, \\ D\Phi(t, x, C_1, \dots, C_n) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ D^n \Phi(t, x, C_1, \dots, C_n) = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Построить дифференциальные уравнения наименьших порядков, решением которых являются заданные функции:

$$38. x = \frac{1}{t + C}.$$

$$39. x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \sin t.$$

$$40. t^2 + C t x - x^2 = 2t.$$

$$41. x = C \cos t, \quad y = C \sin t.$$

$$42. x^{2/3} + t^{2/3} = C^{2/3}.$$

$$43. x = C t + C / \sqrt{1 + C^2}.$$

$$44. x = t \left(1 + \int \frac{e^t}{t} dt \right).$$

$$45. x = t \int \frac{\sin t}{t} dt + 5t^2.$$

$$46. x = t \left(\int_2^t \frac{\tau}{\ln \tau} d\tau + C \right) + \sin t.$$

$$47. x - C_2 - C_1^2 t - \frac{C_1}{2} t^2 = 0.$$

$$48. 3x = 3t + (t + C_1)^3 + C_2.$$

$$49. 3x = 4(t + C_1)^{3/2} + C_2 t + C_3.$$

$$50. x \ln x + t + C_1 x + C_2 = 0.$$

$$51. 2C_1 x = (C_1 t + C_2)^2 + 1.$$

52. Составить дифференциальное уравнение семейства парабол, оси симметрии которых параллельны оси ординат, а вершины расположены на оси абсцисс.

53. Составить дифференциальное уравнение семейства парабол, вершины которых совпадают с началом координат, а осью симметрии является ось абсцисс.

54. Составить дифференциальное уравнение однопараметрического семейства окружностей единичного радиуса, центры которых лежат на прямой $y = 1$.

55. Составить дифференциальное уравнение семейства эллипсов, центры которых совпадают с началом координат, а оси симметрии – с осями координат.

II. ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ

2. Простейшие дифференциальные уравнения. Общее и частное решения.

Начальная и граничная задачи. Функция Грина

Простейшим дифференциальным уравнением порядка n является уравнение

$$D^n x = f(t), \quad t \in I, \quad (2.1)$$

где функция $f(t)$ непрерывна на промежутке I .

Формула, определяющая совокупность решений рассматриваемого уравнения и содержащая n произвольных постоянных, задает его общее решение.

Общее решение простейшего уравнения задается формулой

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k t^k + \int_s^t \left(\int_s^{\tau_1} \dots \int_s^{\tau_{n-1}} f(\tau_n) d\tau_n \dots d\tau_2 \right) d\tau_1 \quad (2.2)$$

или формулой

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k t^k + \int_s^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau \quad \forall s \in I, \quad C_k \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (2.3)$$

Решение, получающееся из общего при конкретных значениях постоянных C_k , $k = \overline{0, n-1}$, называют *частным решением*. Для выделения частного решения из общего используют начальные, граничные и другие дополнительные условия. Условия, относящиеся к одному значению аргумента, называют *начальными*, а относящиеся к различным значениям аргумента – *граничными*.

Начальная задача (задача Коши) для простейшего уравнения порядка n имеет вид

$$D^n x = f(t), \quad t \in I, \quad D^k x|_{t=s} = \xi_k, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (2.4)$$

Решение начальной задачи для простейшего уравнения определяется по формуле

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \frac{(t-s)^k}{k!} + \int_s^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau. \quad (2.5)$$

Найти общие решения уравнений на заданном промежутке:

56. $Dx = t \sin t, \quad I \in \mathbb{R}.$

57. $D^n x = t, \quad I = \mathbb{R}.$

58. $D^3 x = t^{-3}, \quad I = (0, +\infty).$

59. $x' = \cos^2 t, \quad I = \mathbb{R}.$

60. $Dx = \operatorname{tg} t, \quad I = (-\pi/2, \pi/2).$

61. $Dx = (1-t^2)^{-3/2}, \quad I = (-1, 1).$

62. $x' = \sin^3 t, \quad I = \mathbb{R}.$

63. $Dx = e^t \cos t, \quad I = \mathbb{R}.$

64. $D^2 x = \cos 2t, \quad I = \mathbb{R}.$

65. $x'' = (\sin t) / t, \quad I = (0, +\infty).$

66. $D^2 x = e^t / t, \quad I = (0, +\infty).$

Решить начальные задачи и обосновать выбор I :

67. $Dx = \operatorname{ctg} t$, $I = (0, \pi)$, $x|_{t=\pi/2} = -1$.

68. $Dx = t/\sqrt{4t^2 - 1}$, $I = (-\infty, -1/2)$, $x|_{t=-1} = 7$.

69. $x' = \cos t$, $I = \mathbb{R}$, $x|_{t=0} = 10$.

70. $Dx = 1/\sqrt{1-t^2}$, $I = (-1, 1)$, $x|_{t=0} = 93$.

71. $D^3x = -\cos t$, $I = \mathbb{R}$, $x|_{t=0} = 1$, $Dx|_{t=0} = 0$, $D^2x|_{t=0} = -1$.

72. $D^3x = 2/t^3$, $I = (-\infty, 0)$, $x|_{t=-1} = Dx|_{t=-1} = D^2x|_{t=-1} = 1$.

73. $D^3x = e^t + 3t^{-5/2}$, $I = (0, +\infty)$, $x|_{t=1} = Dx|_{t=1} = D^2x|_{t=1} = 0$.

74. $x'' = 1$, $I = \mathbb{R}$:

а) $x|_{t=t_0} = \alpha$, $x'|_{t=t_0} = \beta$;

в) $x|_{t=0} = 0$, $x'|_{t=0} = 1$;

б) $x|_{t=0} = 0$, $x'|_{t=0} = 0$;

г) $x|_{t=0} = 1$, $x'|_{t=0} = 0$.

75. $D^3x = e^{-t}$, $I = \mathbb{R}$, $x|_{t=0} = Dx|_{t=0} = D^2x|_{t=0} = 0$.

76. $D^2x = (t-1)^{-3} - (t+1)^{-3}$, $I = (-1, 1)$, $x|_{t=0} = Dx|_{t=0} = 0$.

Решить граничные задачи:

77. $D^2x = 2$, $I = \mathbb{R}$, $x|_{t=-1} = 0$, $x|_{t=1} = 0$.

78. $D^3x = 2t^{-3}$, $I = (0, +\infty)$, $x|_{t=1} = Dx|_{t=2} = D^2x|_{t=3} = 0$.

79. $x' = -\sin t$, $I = \mathbb{R}$, $x|_{t=0} = 1$, $x|_{t=\pi/2} = 0$.

80. $x' = -\sin t$, $I = \mathbb{R}$, $x|_{t=0} = 1$, $x|_{t=\pi/2} = 1$.

81. Показать, что граничная задача $Dx = f(t)$, $I = \mathbb{R}$, $x|_{t=s} = a$, $x|_{t=r} = b$, $s \leq t \leq r$, имеет решение лишь в исключительных случаях, и описать эти случаи.

82. Показать, что граничная задача $D^2x = f(t)$, $I = \mathbb{R}$, $x|_{t=s} = a$, $x|_{t=r} = b$, $s \leq t \leq r$, всегда имеет решение, и найти его.

Граничная задача для простейшего уравнения при $n = 2$

$$D^2x = f(t), \quad t \in I = [a, b], \quad x|_{t=a} = A, \quad x|_{t=b} = B,$$

имеет решение

$$x = x(t) = \frac{b-t}{b-a}A + \frac{t-a}{b-a}B + \int_a^b G(t, \tau) f(\tau) d\tau,$$

где $G(t, \tau) = (t-\tau) \cdot 1(t-\tau) - \frac{t-a}{b-a}(b-\tau)$, $1(t)$ — функция единичного скачка, $1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$

Функция $G(t, \tau)$ называется функцией Грина граничной задачи.

Записать с помощью функции Грина решения граничных задач:

83. $D^2x = t, \quad x|_{t=0} = 1, \quad x|_{t=2} = 1.$

84. $D^2x = \cos t, \quad x|_{t=0} = 0, \quad x|_{t=\pi} = 0.$

85. $x'' = \operatorname{tg} t, \quad x|_{t=0} = 0, \quad x|_{t=\pi/4} = 1.$

86. $x'' = t, \quad x|_{t=0} = 0, \quad x|_{t=1} = 0.$

3. Уравнения с кусочно-непрерывной неоднородностью

Решением простейшего дифференциального уравнения n -го порядка $D^n x = f(t), t \in I$, с кусочно-непрерывной неоднородностью $f(t)$ называется функция, имеющая непрерывные производные до $(n-1)$ -го порядка включительно, обладающая кусочно-непрерывной производной (Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Гл. XXIV. § 1–2) порядка n и обращающая уравнение в тождество на I всюду, за исключением, быть может, точек разрыва функции f .

Решение задачи Коши (начальной задачи)

$$D^n x = f(t), \quad t \in I, \quad D^k x|_{t=s} = \xi_k, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad s \in I,$$

в случае кусочно-непрерывной неоднородности f на I может быть получено по формуле (2.5) построения решения задачи Коши для непрерывной функции f .

Задача 3.1. Найти общее решение уравнения $D^3 x = f(t)$, где

$$f(t) = \begin{cases} t+1, & t < 0, \\ t^2, & t \geq 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Так как $D^3 x = D(D^2 x)$, то исходное уравнение приводится к уравнению второго порядка

$$D^2 x = \begin{cases} (t+1)^2/2 + C_1^*, & t < 0, \\ t^3/3 + C_1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Учитывая, что искомое решение $x(t)$ должно быть непрерывно на $I = \mathbb{R}$ и иметь непрерывные производные первого и второго порядков, потребуем непрерывности $D^2 x$ в точке $t = 0$, что приводит к равенству $C_1^* + 0,5 = C_1$. Следовательно, $C_1^* = C_1 - 0,5$. Тогда

$$D^2 x = \begin{cases} (t+1)^2/2 + C_1 - 0,5, & t < 0, \\ t^3/3 + C_1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$Dx = \begin{cases} (t+1)^3/3! + (C_1 - 0,5)t + C_2^*, & t < 0, \\ t^4/12 + C_1 t + C_2, & t \geq 0. \end{cases}$$

Вследствие непрерывности Dx в точке $t = 0$ получаем $C_2^* + 1/6 = C_2$, откуда $C_2^* = C_2 - 1/6$. Следовательно,

$$Dx = \begin{cases} (t+1)^3/3! + (C_1 - 0,5)t + C_2 - 1/6, & t < 0, \\ t^4/12 + C_1 t + C_2, & t \geq 0, \end{cases}$$

откуда

$$x(t) = \begin{cases} \frac{(t+1)^4}{4!} + \left(C_1 - \frac{1}{2}\right) \frac{t^2}{2} + \left(C_2 - \frac{1}{6}\right)t + C_3^*, & t < 0, \\ t^5 / 60 + C_1 t^2 / 2 + C_2 t + C_3, & t \geq 0. \end{cases}$$

Непрерывность решения $x(t)$ в точке $t=0$ требует выполнения равенства $C_3^* + 1/24 = C_3$. Следовательно, искомое решение определяется формулой

$$x(t) = \begin{cases} \frac{(t+1)^4}{4!} + \left(C_1 - \frac{1}{2}\right) \frac{t^2}{2} + \left(C_2 - \frac{1}{6}\right)t + C_3 - \frac{1}{24}, & t < 0, \\ t^5 / 60 + C_1 t^2 / 2 + C_2 t + C_3, & t \geq 0. \end{cases}$$

Задача 3.2. Найти общее решение уравнения $Dx = f(t)$, где

$$f(t) = \begin{cases} -1, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Данное уравнение первого порядка имеет решение

$$x(t) = \begin{cases} -t + C_1^*, & t < 0, \\ t + C_1, & t \geq 0, \end{cases}$$

причем $C_1^* = C_1$. Обратим внимание на тот факт, что для найденной *кусочно-дифференцируемой функции* $x(t)$ производная Dx в точке $t=0$ – односторонняя (именно правая) производная – совпадает со значением $f(0)$.

Найти общие решения уравнений:

87. $D^3 x = 1(t - \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

88. $D^2 x = 1(t) \sin(t).$

89. $D^2 x = \begin{cases} t, & t < 0, \\ \sin t, & t \geq 0. \end{cases}$

90. $Dx = \begin{cases} 2+t, & t < 0, \\ t^3, & t \geq 0. \end{cases}$

91. $x'' = t \operatorname{sgn} t, \quad \operatorname{sgn} t = \begin{cases} -1, & t < 0, \\ 0, & t = 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$

Решить задачи Коши:

92. $x' = e^{2t} \cdot 1(t), \quad x|_{t=0} = 2.$

93. $D^2 x = 1 / (t - 3):$

а) $x|_{t=3} = 1, \quad Dx|_{t=3} = 0;$

б) $x|_{t=4} = 2, \quad Dx|_{t=4} = 1;$

в) $x|_{t=0} = 0, \quad Dx|_{t=0} = 0.$

4. Геометрические приложения простейших дифференциальных уравнений. Простейшие математические модели естественных процессов

Геометрические приложения. При отыскании кривых $y = y(x)$, удовлетворяющих некоторым условиям, нередко бывает легче установить соотношения между дифференциалами переменных x и y , используя геометрический смысл этих понятий, и, следовательно, построить дифференциальное уравнение для функции $y(x)$. Построение касательной, определение длины подкасательной и поднормали основаны на том, что $y'(x_0)$ определяет угловой коэффициент касательной к кривой $y = y(x)$ в точке $(x_0, y(x_0))$. Подкасательной кривой $y = y(x)$ в точке $(x_0, y(x_0))$ называется проекция на ось абсцисс направленного отрезка касательной, заключенного между точкой касания и точкой пересечения этой касательной с осью абсцисс. Поднормаль кривой $y = y(x)$ в точке $(x_0, y(x_0))$ – это проекция на ось абсцисс направленного отрезка нормали от точки $(x_0, y(x_0))$ до точки пересечения нормали с осью абсцисс.

Иногда при решении геометрических задач получается *интегральное уравнение* (уравнение, содержащее интеграл искомой функции), которое приводится к дифференциальному уравнению с помощью операции дифференцирования.

Задача 4.1. Найти кривые, у которых тангенс угла между касательной и положительным направлением оси Ox пропорционален абсциссе точки касания.

Решение. Пусть $y = y(x)$ – искомая функция. Тогда $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$ есть тангенс упоминаемого в условии задачи угла. Следовательно, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = ax_0$, где a – коэффициент пропорциональности. Так как требуемое соотношение должно выполняться для всех точек искомой кривой, то имеем дифференциальное уравнение $y' = ax$. Решив его, получим кривые $y = ax^2/2 + C$, $C \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию задачи.

94. Найти кривые, у которых тангенс угла между касательной и положительным направлением оси Ox обратно пропорционален абсциссе точки касания.

95. Найти кривые, у которых тангенс угла между касательной и положительным направлением оси Ox равен квадрату абсциссы точки касания.

96. Найти проходящую через точку $(1, 1)$ кривую, у которой отрезок касательной в произвольной точке этой касательной, заключенный между осями координат, делится точкой касания в отношении 2:3, считая от оси абсцисс.

97. Найти проходящую через точку $(1, 1)$ кривую, у которой отрезок нормали в произвольной точке, заключенный между осями координат, делится точкой касания в отношении 2:3, считая от оси абсцисс.

98. Найти кривые, нормаль в каждой точке которых проходит через точку (a, b) .

99. Найти кривые, у которых величина поднормали во всех точках кривой одинакова и равна a , $a > 0$. (Указание. При решении полученного дифференциального уравнения рассматривать $x = x(y)$.)

100. Найти кривые, у которых подкасательная во всех точках имеет постоянную длину, равную a .

101. Найти кривые, для которых площадь фигуры, заключенной между осями координат, кривой и прямой, параллельной оси ординат, проходящей через произвольную точку кривой, равна кубу ординаты этой точки. (Указание. Воспользоваться формулой вычисления площади криволинейной трапеции с помощью интеграла.)

Простейшие математические модели естественных процессов. При решении задач естествознания с помощью дифференциальных уравнений необходимо сначала составить дифференциальное уравнение задачи, т.е. соотношение, связывающее независимую переменную t , трактуемую чаще всего как время, искомую функцию $x(t)$ и скорость ее изменения $Dx(t) = dx/dt$. Затем найти его общее решение и, наконец, учесть условия, с помощью которых можно определить значения постоянных, входящих в общее решение дифференциального уравнения.

Задача 4.2. Точечный заряд q находится на продолжении оси тонкого стержня длиной l на расстоянии a от его левого конца. Определить силу притяжения стержня и точечного заряда, если на стержне равномерно распределен заряд Q .

Решение. По закону Кулона модуль силы притяжения F между двумя точечными зарядами q_1 и q_2 , расположенными на расстоянии r друг от друга, выражается зависимостью $F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$, где k – коэффициент

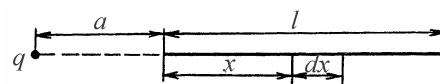


Рис. 1

пропорциональности (коэффициент притяжения). Определим силу притяжения dF данного точечного заряда элементом dx (рис. 1). Пусть Q_1 – заряд стержня длиной dx , тогда $Q_1 = Q dx/l$, где Q/l – заряд стержня единичной длины. Расстояние r между точечным зарядом и зарядом элемента dx стержня равно $a + x$. Применив закон Кулона, получим дифференциальное уравнение $dF = k \frac{qQ dx}{l(a+x)^2}$, про-

интегрировав которое найдем общее решение $F = -k \frac{qQ}{l} \frac{1}{a+x} + C$. Так как при $x=0$ сила F равна нулю, то $C = k \frac{qQ}{l} \frac{1}{a}$. Тогда сила притяжения F точечного заряда отрезком стержня длиной x равна $k \frac{qQ}{l} \frac{x}{a(a+x)}$. При $x=l$ определяем силу притяжения точки всем стержнем: $F = k \frac{qQ}{a(a+l)}$.

102. Найти зависимость пути s от времени t при равномерном прямолинейном движении со скоростью v_0 , если $s|_{t=t_0} = s_0$.

103. Материальная точка движется прямолинейно с постоянным ускорением a . Найти закон движения точки, если начальная скорость ее v_0 , а путь, пройденный к началу движения, равен s_0 .

104. Найти закон движения материальной точки при свободном падении с заданной высоты h_0 с начальной скоростью v_0 .

105. Тело движется по прямой с ускорением, равным $a_0/(1+t)^2$ (a_0 – постоянная). Движение начинается из состояния покоя при $t=0$. Найти закон движения тела.

106. Скорость изменения концентрации $c(t)$ препарата с изотопным индикатором в момент времени t равна 2^{-t} (где t – время в часах). Найти концентрацию в момент $t=3$, если начальная концентрация составляет 1 г/л.

107. Скорость роста популяции насекомых в момент времени t (время выражено в днях) задается величиной $9000/(1+t)^2$. Найти численность популяции насекомых в момент времени t , если вначале популяция состояла из 1000 насекомых.

108. Дрожжи в растворе сахара растут таким образом, что их масса увеличивается со скоростью $1,03^t \ln 1,03$ (t – время в часах). Пусть начальная масса дрожжей составляет 1 г. Составить математическую модель процесса и найти значение массы дрожжей после:

а) 10 мин роста; б) 20 мин роста.

109. Скорость роста популяции бактерий в момент времени t равна $10^4 - 2 \cdot 10^3 t$ (где t – время в часах). В начальный момент численность популяции равна 10^6 . Найти численность популяции после:
а) 1 ч; б) 5 ч; в) 10 ч.

Указать момент времени, в который популяция будет максимальной.

110. В питательную среду вносят популяцию из 1000 бактерий. Численность популяции возрастает со скоростью

$$v = 1000 \frac{100 + 3t^2}{(100 + t^2)^2},$$

где t – время в часах. Найти размер этой популяции: а) в момент времени t ; б) максимальный.

111. Судно водоизмещением m , движущееся прямым курсом, в момент включения двигателя имело скорость $\bar{v}_0$. Считая, что модуль силы упора винтов $\bar{Q}$ пропорционален времени с коэффициентом пропорциональности k , а сила сопротивления воды $\bar{T}$ постоянна, составить математическую модель движения, определить путь s , пройденный судном за время t_1 , если за это время его скорость увеличилась в два раза.

111.1. В ультрацентрифугах скорость смещения молекул исследуемого полимера в направлении от оси вращения выражается формулой $v = b\omega^2 x$, где b – постоянная величина, характеризующая данный полимер, ω – угловая скорость вращения, x – расстояние от оси вращения до движущейся границы оседающего полимера. Найти закон движения границы полимера, если в момент времени $t = 0$ она находилась на расстоянии x_0 от оси вращения.

111.2. Скорость изменения пороговой силы тока выражается формулой $I'(t) = 1,12/t^2$. Найти закон изменения тока, если в момент времени $t = t_0 > 0$ соответствующее значение тока равно I_0 .

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

III. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

5. Линейные уравнения со стационарным оператором

Общее решение однородного уравнения. Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами в основной форме имеет вид

$$D^n x + a_{n-1} D^{n-1} x + \dots + a_1 D x + a_0 x = f(t), \quad t \in I, \quad (5.1)$$

где $a_k \in \mathbb{R}, k = \overline{0, n-1}$, а f непрерывна на I . Если $f \equiv 0$, то уравнение называют *однородным*, при $f \not\equiv 0$ – *неоднородным*.

Уравнение

$$D^n x + a_{n-1} D^{n-1} x + \dots + a_1 D x + a_0 x = 0 \quad (5.2)$$

есть однородное уравнение, соответствующее исходному неоднородному, где $a_0, \dots, a_{n-1}$ те же, что и в исходном уравнении (5.1).

Стационарный дифференциальный оператор n -го порядка

$$L_n = D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 D^0, \quad (5.3)$$

определенный на множестве функций с непрерывной производной порядка n , является *линейным оператором*, т.е.

$$L_n(\alpha x + \beta y) = \alpha L_n x + \beta L_n y, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (5.4)$$

Линейное уравнение (5.1) со стационарным оператором L_n (иногда называемое *стационарным уравнением*) записывается в виде

$$(D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 D^0)x = f(t), \quad t \in I, \quad (5.5)$$

или кратко:

$$L_n x = f(t), \quad t \in I. \quad (5.6)$$

Для стационарного линейного оператора L_n алгебраическое относительно v уравнение

$$v^n + a_{n-1} v^{n-1} + \dots + a_1 v + a_0 = 0 \quad (5.7)$$

называется *характеристическим уравнением оператора* L_n . Корни его $v_1, v_2, \dots, v_m$ кратностей $d_1, d_2, \dots, d_m$ соответственно ($d_1 + d_2 + \dots + d_m = n$) называются *характеристическими числами* линейного однородного дифференциального уравнения или *собственными значениями оператора* L_n , при этом *характеристический полином* оператора L_n может быть записан в виде

$$v^n + a_{n-1} v^{n-1} + \dots + a_1 v + a_0 = (v - v_1)^{d_1} (v - v_2)^{d_2} \dots (v - v_m)^{d_m}.$$

Над операторами производятся обычные действия, как над полиномами от D , поэтому оператор L_n можно разложить на множители, т.е. *факторизовать*:

$$L_n = (D - v_1 D^0)^{d_1} (D - v_2 D^0)^{d_2} \dots (D - v_m D^0)^{d_m}. \quad (5.8)$$

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения со стационарным оператором имеет вид

$$x(t) = \sum_{l=1}^r (Q_l(t) \cos \mu_l t + R_l(t) \sin \mu_l t) \exp(\lambda_l t) + \sum_{j=2r+1}^m P_j(t) \exp(v_j t), \quad (5.9)$$

где $v_{2l-1} = \lambda_l + i\mu_l$, $v_{2l} = \lambda_l - i\mu_l$, $l = \overline{1, r}$, – попарно комплексно-сопряженные корни характеристического полинома; v_j , $j = 2r+1, \dots, m$, – действительные корни; Q_l , R_l , P_j – полиномы с произвольными действительными коэффициентами. Степень Q_l , равная степени R_l , на единицу меньше кратности корня $v_{2l-1} = \lambda_l + i\mu_l$. Степень P_j на единицу меньше кратности действительного корня v_j . Каждое слагаемое первой суммы общего решения строится для пары комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения. Каждому действительному корню характеристического уравнения соответствует слагаемое второй суммы.

Совокупность решений однородного уравнения $L_n x = 0$ является n -мерным линейным пространством. Базис этого пространства называют *базисом пространства решений* или *фундаментальной системой решений* однородного уравнения.

Задача 5.1. Построить общее решение однородного уравнения $L_n x = 0$.

А л г о р и т м р е ш е н и я.

- Составить характеристическое уравнение (5.7), найти его корни и их кратности.
- Определить степени многочленов Q_l , R_l , P_j .
- Записать общее решение уравнения, используя формулу общего решения (5.9).

Задание 5.1.1. Построить общее решение для следующих однородных уравнений:

а) $x'' - 4x' = 0$;

б) $D^3 x - 3Dx + 2x = 0$;

в) $x'' + 2x' + 10x = 0$;

г) $D^4 x + 2D^2 x - 8Dx + 5x = 0$;

д) $D^5 x - 8D^4 x + 26D^3 x - 40D^2 x + 25Dx = 0$.

Р е ш е н и е.

а) $v^2 - 4 \cdot v \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$	$x(t) = C_1 + C_2 e^{4t}$
б) $v^3 - 3 \cdot v + 2 \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$	$x(t) = (C_1 + C_2 \cdot t)e^t + C_3 \cdot e^{-2t}$

$$\text{в) } v^2 + 2 \cdot v + 10 \text{ solve} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 - 3i \\ -1 + 3i \end{pmatrix}$$

$$x(t) = (C_1 \cdot \cos(3t) + C_2 \cdot \sin(3t))e^{-t}$$

$$\text{г) } v^4 + 2 \cdot v^2 - 8 \cdot v + 5 \text{ solve} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 - 2i \\ -1 + 2i \end{pmatrix}$$

$$x(t) = (C_1 + C_2 \cdot t)e^t + (C_3 \cdot \cos(2t) + C_4 \cdot \sin(2t)) \cdot e^{-t}$$

$$\text{д) } v^5 - 8 \cdot v^4 + 26 \cdot v^3 - 40 \cdot v^2 + 25 \cdot v \text{ solve} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 - i \\ 2 - i \\ 2 + i \\ 2 + i \end{pmatrix}$$

$$x(t) = C_1 + [(C_2 + C_3 \cdot t)\cos(t) + (C_4 + C_5 \cdot t) \cdot \sin(t)] \cdot e^{2t}$$

В данном листинге мы использовали символьное преобразование MathCad, а именно из палитры Symbolic команду Solve (решить), которая решает уравнение или неравенство относительно выделенной переменной. Напомним, что для решения уравнения нужно ввести выражение, выделить в нем переменную и щелкнуть по строке Solve пункта Variable меню Symbolics или, как сделали мы, воспользоваться панелью Symbolic.

Построить общие решения уравнений:

$$112. D^2x + Dx - 2x = 0.$$

$$113. x'' + 4x' + 3x = 0.$$

$$114. D^2x - 2Dx = 0.$$

$$115. 2x'' - 5x' + 2x = 0.$$

$$116. D^2x + 7Dx = 0.$$

$$117. x'' - 4x' + 5x = 0.$$

$$118. D^3x - 3D^2x + 4Dx - 2x = 0.$$

$$119. D^2x - Dx + x = 0.$$

$$120. D^4x - x = 0.$$

$$121. D^4x - 5D^2x + 10Dx - 6x = 0.$$

$$122. D^4x + 2D^3x + 4D^2x + 6Dx + 3x = 0.$$

$$123. D^3x + 5D^2x + 7Dx + 3x = 0.$$

Задача 5.2. Для уравнения $D^n x + a_{n-1}D^{n-1}x + \dots + a_1Dx + a_0x = 0$ выписать и факторизовать оператор L_n . Построить общее решение однородного уравнения $L_n x = 0$.

Алгоритм решения.

- Записать L_n по формуле (5.3).
- Найти собственные значения оператора L_n и их кратности, составив и решив характеристическое уравнение (5.7).
- Записать оператор L_n в факторизованном виде по формуле (5.8).
- Записать общее решение уравнения.

Задание 5.2.1. Для уравнения

$$D^7x - 5D^6x + 11D^5x - 15D^4x + 19D^3x - 15D^2x + 9Dx - 5x = 0$$

выписать и факторизовать оператор L_7 . Построить общее решение уравнения $L_7x = 0$.

Р е ш е н и е.

$$v^7 - 5 \cdot v^6 + 11 \cdot v^5 - 15 \cdot v^4 + 19 \cdot v^3 - 15 \cdot v^2 + 9 \cdot v - 5 \text{ solve} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -i \\ i \\ i \\ 2-i \\ 2+i \end{pmatrix}$$

$$L_7 = (D - D^0) \cdot (D - i \cdot D^0)^2 \cdot (D + i \cdot D^0)^2 \cdot [D - (2-i) \cdot D^0] \cdot [D - (2+i) \cdot D^0]$$

Окончательно $x(t) = C_1 e^t + (C_2 t + C_3) \cos t + (C_4 t + C_5) \sin t + (C_6 \cos t + C_7 \sin t) e^{2t}$.

Для данных уравнений выписать и факторизовать оператор L_n . Построить общие решения уравнений:

124. $D^2x - 2Dx + x = 0$.

125. $x'' - 6x' + 13x = 0$.

126. $D^2x + 4x = 0$.

127. $4x'' + 4x' + x = 0$.

128. $D^2x + 3x = 0$.

129. $x'' + 4x' + 4x = 0$.

130. $D^3x + 4D^2x - Dx - 4x = 0$.

131. $D^3x + 4D^2x - Dx - 4x = 0$.

132. $D^3x - 2D^2x = 0$.

133. $D^4x - 5D^2x + 4x = 0$.

134. $D^4x + 4D^2x + 3x = 0$.

135. $D^4x + 2D^2x - 8Dx + 5x = 0$.

136. $D^5x - 10D^3x + 9Dx = 0$.

137. $D^7x + 4D^6x - D^3x - 4D^2x = 0$.

138. $D^4x - 8D^3x + 26D^2x - 40Dx + 25x = 0$.

Построить общее решение уравнения $L_n x = 0$:

139. $L_9 = (D - 3D^0)^2 (D - iD^0) (D + iD^0) \left(D - \frac{1+i}{3}D^0\right)^2 \left(D - \frac{1-i}{3}D^0\right)^2 D$.

140. $L_6 = (D - D^0)^3 (D - (2+i)D^0) (D - (2-i)D^0) (D - \sqrt{7}D^0)$.

141. $L_8 = (D + (1+i\sqrt{3})D^0)^3 (D + (1-i\sqrt{3})D^0)^3 D (D + D^0)$.

142. $L_8 = (D + (1+i\sqrt{2})D^0)^2 (D + (1-i\sqrt{2})D^0)^2 D^3 \left(D - \frac{1}{2}D^0\right)$.

143. $L_8 = (D - i\sqrt{5}D^0)^4 (D + i\sqrt{5}D^0)^4$.

$$144. L_7 = (D - i\sqrt{5}D^0)^2 (D + i\sqrt{5}D^0)^2 (D + \sqrt{5}D^0)^3.$$

$$145. L_9 = (D - \sqrt{3}D^0)^3 (D + \sqrt{3}D^0)^3 (D - (3-i)D^0)D(D - (3+i)D^0).$$

$$146. L_{10} = D^5 (D + D^0)^2 \left(D - \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right) D^0 \right) \left(D - \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right) D^0 \right) (D + 0,7D^0).$$

$$147. L_5 = (D - 0,1D^0)^2 \left(D - \left(\sqrt{3} + \frac{i}{2} \right) D^0 \right) \left(D - \left(\sqrt{3} - \frac{i}{2} \right) D^0 \right) D.$$

$$148. L_{10} = (D + 0,1D^0)^4 (D + iD^0)^2 (D - iD^0)^2 (D - (i+2)D^0)(D + (i-2)D^0).$$

149. Составить линейное однородное уравнение со стационарным оператором по его характеристическому уравнению:

а) $9v^2 - 6v + 1 = 0;$

в) $(v^2 + 1)^2 = 0;$

б) $v(v+1)(v+2) = 0;$

г) $v^2(v-1) = 0.$

150. Составить линейное однородное уравнение со стационарным оператором и записать его общее решение по заданным корням его характеристического уравнения:

а) $v_1 = 1, d_1 = 1; v_2 = 2, d_2 = 1;$

б) $v_1 = 1, d_1 = 3;$

в) $v_1 = 3 + 2i, d_1 = 1; v_2 = 3 - 2i, d_2 = 1;$

г) $v_1 = 2, d_1 = 1; v_2 = i, d_2 = 1; v_3 = -i, d_3 = 1.$

151. При каких значениях параметра λ уравнение $D^2x + \lambda x = 0$ имеет ненулевые решения, удовлетворяющие граничным условиям $x|_{t=0} = 0, x|_{t=\pi} = 0$? Найти эти решения.

152. Решить граничные задачи:

а) $D^2x + x = 0, x|_{t=0} = 1, x|_{t=\pi/2} = 1;$

б) $D^2x + x = 0, x|_{t=0} = 1, x|_{t=\pi} = 2;$

в) $D^2x + x = 0, x|_{t=0} = 1, x|_{t=2\pi} = 1.$

153. При каких значениях α граничная задача для уравнения $D^2x + \alpha x = 0$ имеет ненулевое решение, если:

а) $Dx|_{t=0} = Dx|_{t=\pi} = 0;$ б) $x|_{t=0} = x|_{t=\pi}, Dx|_{t=0} = Dx|_{t=\pi}?$

154. Решить граничную задачу

$$D^4x - \alpha^4x = 0, x|_{t=0} = D^2x|_{t=0} = 0, x|_{t=\pi} = D^2x|_{t=\pi} = 0, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Дифференциальное уравнение радиоактивного распада. Атомы радиоактивных элементов с течением времени распадаются. Опытным путем установлено, что скорость распада пропорциональна числу нераспавшихся в данный момент атомов. Поэтому дифференциальное уравнение, описывающее процесс радиоактивного распада, имеет вид

$$N'(t) = -\lambda N(t),$$

где λ – постоянная распада, дающая вероятность распада атома данного радиоактивного вещества в единицу времени; $N(t)$ – число нераспавшихся атомов в момент времени t . Если в момент време-

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
ВВЕДЕНИЕ	5
I. Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений	5
1. Дифференциальное уравнение. Порядок уравнения. Решения уравнения	5
II. Простейшие уравнения	10
2. Простейшие дифференциальные уравнения. Общее и частное решения. Начальная и граничная задачи. Функция Грина	10
3. Уравнения с кусочно-непрерывной неоднородностью	12
4. Геометрические приложения простейших дифференциальных уравнений. Простейшие математические модели естественных процессов	14
ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ	17
III. Однородные уравнения	17
5. Линейные уравнения со стационарным оператором	17
6. Базис пространства решений	26
IV. Неоднородные уравнения	34
7. Структура общего решения. Метод вариации произвольных постоянных	34
8. Функция Коши линейного оператора. Разрешение уравнений по правилу Коши	39
9. Уравнение с квазиполиномиальной неоднородностью. Правило Эйлера	41
10. Математические модели прикладных задач	44
V. Фазовая плоскость однородного линейного уравнения второго порядка со стационарным оператором	53
11. Схема расположения фазовых графиков	53
12. Определение типа точки покоя	54
VI. Устойчивость по Ляпунову линейных уравнений со стационарным оператором	79
13. Устойчивость в смысле Ляпунова	79
14. Асимптотическая устойчивость	81
<i>Контрольная работа № 1</i>	83
<i>Тестовые задания</i>	84
ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ	85
VII. Методы интегрирования стационарных линейных векторных уравнений	85
15. Линейные векторные уравнения	85
16. Сведение линейной системы к совокупности независимых уравнений	88
17. Метод Д'Аламбера решения линейных векторных уравнений	93
18. Экспонентное представление решений. Метод Коши	94
19. Метод Эйлера интегрирования однородных линейных векторных уравнений	129
20. Метод Лагранжа интегрирования неоднородных линейных векторных уравнений	135
VIII. Исследование стационарных линейных векторных уравнений	143
21. Устойчивость решений линейных векторных уравнений в смысле Ляпунова. Асимптотическая устойчивость	143
22. Фазовая плоскость однородного стационарного линейного векторного уравнения	149
23. Разные задачи	162
<i>Контрольная работа № 2</i>	166
<i>Тестовые задания</i>	167
ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	169
IX. Уравнения первого порядка в нормальной дифференциальной форме	169
24. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель	169

25. Уравнения с разделяющимися переменными	186
26. Линейные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли	192
27. Однородные уравнения. Уравнения, приводящиеся к однородным	202
28. Случаи интегрируемости уравнения Риккати	212
29. Особые решения уравнений в нормальной дифференциальной форме	216
30. Составление математических моделей прикладных задач	219
<i>Контрольная работа № 3</i>	227
X. Уравнения в общей форме	227
31. Приведение уравнений в общей форме к уравнениям в нормальной дифференциальной форме	227
32. Метод введения параметра	230
33. Уравнения Лагранжа и Клеро	233
34. Ортогональные и изогональные траектории	235
35. Уравнения n -го порядка, допускающие понижение порядка	238
<i>Контрольная работа № 4</i>	242
<i>Тестовые задания</i>	243
ЛИНЕЙНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ	244
XI. Линейные уравнения с непрерывными коэффициентами	244
36. Понижение порядка уравнения с известным частным решением	244
37. Приведение линейного уравнения к стационарному	247
38. Уравнение Эйлера	249
<i>Контрольная работа № 5</i>	252
<i>Тестовые задания</i>	253
XII. Линейные уравнения с голоморфными коэффициентами	253
39. Голоморфные решения	253
40. Обобщенные степенные ряды. Уравнение Бесселя	263
41. Колеблемость решений уравнения второго порядка с непрерывными коэффициентами	267
XIII. Дифференциальные системы с переменными коэффициентами	269
42. Дифференциальные системы в нормальной дифференциальной форме	269
43. Дифференциальные системы в симметрической форме	275
44. Функции Ляпунова и устойчивость	277
XIV. Некоторые методы приближенного решения векторных уравнений	283
45. Метод Пикара	283
46. Метод ломаных Эйлера	297
47. Построение приближенного решения в виде ряда	300
УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА	311
XV. Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка	311
48. Однородные линейные уравнения. Задача Коши	311
49. Квазилинейные уравнения с частными производными. Задача Коши	313
XVI. Нелинейные уравнения с частными производными первого порядка	316
50. Уравнение Пфаффа	316
51. Метод Лагранжа	319
<i>Контрольная работа № 6</i>	320
ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ	321
О т в е т ы	328
П р и л о ж е н и е. MathCad. Краткий справочник	354
Л и т е р а т у р а	380

Учебное издание

Альсевич Лариса Алексеевна
Мазаник Сергей Алексеевич
Расолько Галина Алексеевна
Черенкова Людмила Павловна

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.
ПРАКТИКУМ**

Учебное пособие

Редактор *Е.В. Савицкая*
Художественный редактор *Е.Э. Агунович*
Технический редактор *М.В. Бригер*
Корректор *Е.В. Савицкая*
Компьютерная верстка *М.В. Бригер*

Подписано в печать 27.06.2012. Формат 84×108/16. Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс». Печать офсетная. Усл. печ. л. 40,32.
Уч.-изд. л. 25,8. Тираж 900 экз. Заказ 1499.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Вышэйшая школа”».
ЛИ № 02330/0494062 от 03.02.2009. Пр. Победителей, 11, 220048, Минск.
E-mail: market@vshph.com [Http://vshph.com](http://vshph.com)

Филиал № 1 открытого акционерного общества «Красная звезда».
ЛП № 02330/0494160 от 03.04.2009. Ул. Советская, 80, 225409, Барановичи.

Дифференциальные уравнения. Практикум : учеб.
Д50 пособие / Л. А. Альсевич [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2012. –
382 с.: ил.
ISBN 978-985-06-2111-5

Даны краткие теоретические сведения и решения типовых задач. Задачи повышенной трудности сопровождаются указаниями. Представлено большое количество задач прикладного характера, снабженных необходимыми сведениями из соответствующих областей физики, механики, биологии, экономики. Приведены задания для контрольных и лабораторных работ.

Для студентов математических, физических и экономических специальностей учреждений высшего образования. Может быть использовано аспирантами, магистрантами и студентами всех естественнонаучных специальностей.

УДК 517.9(075.9)
ББК 22.161.6я73