

# ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Допущено  
Министерством образования Республики Беларусь  
в качестве учебного пособия для студентов  
технических специальностей учреждений,  
обеспечивающих получение высшего образования

**В четырех частях**  
**Часть 3**

**Ряды.**  
**Кратные и криволинейные интегралы.**  
**Элементы теории поля**

Под общей редакцией  
доктора физико-математических наук,  
профессора *А.П. Рябушко*

6-е издание



Минск  
«Вышэйшая школа»

УДК 51(076.1)(075.8)  
ББК 22.1я73  
И60

Авторы: *А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юроть*

Рецензенты: кафедра высшей математики № 1 Белорусского национального технического университета; заведующий отделом теории чисел Института математики Национальной академии наук Беларуси доктор физико-математических наук, профессор *В.И. Берник*

*Все права на данное издание защищены. Воспроизведение всей книги или любой ее части не может быть осуществлено без разрешения издательства.*

**Индивидуальные задания по высшей математике :**  
И60 учеб. пособие. В 4 ч. Ч. 3. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля / А. П. Рябушко [и др.] ; под общ. ред. А. П. Рябушко. — 6-е изд. — Минск : Выш. шк., 2013. — 367 с. : ил.

ISBN 978-985-06-2222-8.

Это третья книга комплекса учебных пособий по курсу высшей математики, направленных на развитие и активизацию самостоятельной работы студентов технических вузов. Содержатся теоретические сведения и наборы задач для аудиторных и индивидуальных заданий.

Предыдущее издание вышло в 2009 г.

Для студентов инженерно-технических специальностей вузов. Будет полезно студентам экономических специальностей, а также преподавателям вузов, колледжей и техникумов.

УДК 51(076.1)(075.8)  
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-06-2222-8 (ч. 3)  
ISBN 978-985-06-2000-2

© Оформление. УП «Издательство  
“Вышэйшая школа”», 2013

## ПРЕДИСЛОВИЕ

---

Предлагаемая вниманию читателя книга продолжает комплекс учебных пособий под общим названием «Индивидуальные задания по высшей математике». Он написан в соответствии с действующими программами курса высшей математики в объеме 380—450 часов для инженерно-технических специальностей вузов. Этот комплекс может быть использован также в вузах других профилей, в которых количество часов, отведенное на изучение высшей математики, значительно меньше. (В последнем случае из предлагаемого материала рекомендуется сделать необходимую выборку.) Кроме того, он вполне доступен для студентов вечерних и заочных отделений вузов.

Данный комплекс пособий адресован преподавателям и студентам и предназначен для проведения практических аудиторных занятий, самостоятельных (миниконтрольных) работ и выдачи индивидуальных домашних заданий по всем разделам курса высшей математики.

В третьей книге комплекса «Индивидуальные задания по высшей математике» содержится материал по рядам, кратным и криволинейным интегралам и элементам теории поля. Ее структура аналогична структуре первых двух книг, а нумерация глав, параграфов и рисунков продолжает соответствующую нумерацию. В Приложениях приведены двухчасовые контрольные работы для блочных экзаменов.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензентам — коллективу кафедры высшей математики № 1 Белорусского национального технического университета, возглавляемому доктором технических наук, профессором Н.А. Микуликом, и заведующему отделом теории чисел Института математики Национальной академии наук Беларуси доктору физико-математических наук, профессору В.И. Бернику — за ценные замечания и советы, способствовавшие улучшению книги.

Все отзывы и пожелания просьба направлять по адресу: издательство «Вышэйшая школа», пр. Победителей, 11, 220048, Минск.

*Авторы*

## МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

---

Охарактеризуем структуру пособия, методику его использования, организацию проверки и оценки знаний, навыков и умений студентов.

Весь практический материал по курсу высшей математики разделен на главы, в каждой из которых даются необходимые теоретические сведения (основные определения, формулировки теорем, формулы), используемые при решении задач и выполнении упражнений. Изложение этих сведений иллюстрируется решенными примерами. (Начало решения примеров обозначается символом ►, а конец — ◄.) Затем даются подборки задач с ответами для всех практических аудиторных занятий (АЗ) и для самостоятельных (миниконтрольных) работ на 10–15 минут во время этих занятий. И, наконец, приводятся недельные индивидуальные домашние задания (ИДЗ), каждое из которых содержит 30 вариантов и сопровождается решением типового варианта. Часть задач из ИДЗ снабжена ответами. В конце каждой главы предлагаются дополнительные задачи повышенной трудности и прикладного характера.

В приложении приведены двухчасовые контрольные работы (каждая — по 30 вариантов) по важнейшим темам курса.

Нумерация АЗ сквозная и состоит из двух чисел: первое из них указывает на главу, а второе — на порядковый номер АЗ в этой главе. Например, шифр АЗ-12.1 означает, что АЗ относится к двенадцатой главе и является первым по счету. В третьей части пособия содержится 21 АЗ и 10 ИДЗ.

Для ИДЗ также принята нумерация по главам. Например, шифр ИДЗ-12.2 означает, что ИДЗ относится к двенадцатой главе и является вторым. Внутри каждого ИДЗ принята следующая нумерация: первое число означает номер задачи в данном задании, а второе — номер варианта. Таким образом, шифр ИДЗ-12.2 : 16 означает, что студент должен выполнять 16-й вариант из ИДЗ-12.2, который содержит задачи 1.16, 2.16, 3.16 и т.д.

При выдаче ИДЗ студентам номера выполняемых вариантов можно менять от задания к заданию по какой-либо системе или случайным образом. Более того, можно при выдаче ИДЗ любому студенту составить его вариант, комбинируя однотипные задачи из разных вариантов. Например, шифр ИДЗ-12.2 : 1.2; 2.4; 3.6; 4.1; 5.15 означает, что студенту следует решать в ИДЗ-12.2 первую задачу из варианта 2, вторую — из варианта 4, третью — из варианта 6, четвертую — из варианта 1 и пятую — из варианта 15. Такой комбинированный метод выдачи ИДЗ позволяет из 30 вариантов получить большое количество новых вариантов.

Внедрение ИДЗ в учебный процесс показало, что целесообразнее выдавать ИДЗ не после каждого АЗ (которых, как правило, два в неделю), а одно недельное ИДЗ, включающее основной материал двух АЗ данной недели.

Дадим некоторые общие рекомендации по организации работы студентов в соответствии с настоящим пособием.

1. В вузе студенческие группы по 25 человек, проводятся два АЗ в неделю, планируются еженедельные не обязательные для посещения студентами консультации, выдаются недельные ИДЗ. При этих условиях для систематического контроля с выставлением оценок, указанием ошибок и путей их исправления могут быть использованы выдаваемые каждому преподавателю матрицы ответов и банк листов решений, которые кафедра заготавливает для ИДЗ (студентам они не выдаются). Если матрицы ответов составляются для всех задач из ИДЗ, то листы решений разрабатываются только для тех задач и вариантов, где важно проверить правильность выбора метода, последовательности действий, навыков и умений при вычислениях. Кафедра определяет, для каких ИДЗ нужны листы решений. Листы решений (один вариант располагается на одном листе) используются при самоконтроле правильности выполнения заданий студентами, при взаимном студенческом контроле, а чаще всего при комбинированном контроле: преподаватель проверяет лишь правильность выбора метода, а студент по листу решений — свои вычисления. Это позволяет проверить ИДЗ 25 студентов за 15–20 минут с выставлением оценок в журнал.

2. В вузе студенческие группы по 15 человек, проводятся два АЗ в неделю, в расписание для каждой группы включены обязательные два часа в неделю самоподготовки под контролем преподавателя. При этих условиях организация индиви-

дуальной, самостоятельной, творческой работы студентов, оперативного контроля за качеством этой работы значительно улучшается. Рекомендованные выше методы пригодны и в данном случае, однако появляются новые возможности. На АЗ быстрее проверяются и оцениваются ИДЗ, во время обязательной самоподготовки можно проконтролировать проработку теории и решение ИДЗ, выставить оценки части студентов, принять задолженности по ИДЗ у отстающих.

Накапливание большого количества оценок за ИДЗ, самостоятельные и контрольные работы в аудитории позволяет контролировать учебный процесс, управлять им, оценивать качество усвоения изучаемого материала.

Все это дает возможность отказаться от традиционного итогового семестрового (годового) экзамена по материалу всего семестра (учебного года) и ввести так называемую рейтинг-блок-модульную систему (РБМС) оценки знаний и навыков студентов, состоящую в следующем. Материал семестра (учебного года) разбивается на блоки (модули), по каждому из которых выполняются АЗ, ИДЗ и в конце каждого цикла — двухчасовая письменная коллоквиум-контрольная работа, в которую входят 2–3 теоретических вопроса и 5–6 задач. Учет оценок по АЗ, ИДЗ и коллоквиуму-контрольной позволяет вывести объективную общую оценку за каждый блок (модуль) и итоговую оценку по всем блокам (модулям) семестра (учебного года). Положение о РБМС см. в ч. 1 данного комплекса учебных пособий (прил. 5).

В заключение отметим, что усвоение содержащегося в пособии материала гарантирует хорошие знания студента по соответствующим разделам курса высшей математики. Для отлично успевающих студентов можно разработать специальные задания на весь семестр, включающие задачи настоящего пособия, а также дополнительные более сложные задачи и теоретические упражнения (для этой цели, в частности, предназначены дополнительные задачи в конце каждой главы). Преподаватель может выдать эти задания в начале семестра, установить график их выполнения под своим контролем, разрешить свободное посещение лекционных или практических занятий по высшей математике и в случае успешной работы выставить отличную оценку до экзаменационной сессии.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

---

|                                                                                                 |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Предисловие - - - - -                                                                           | 3          |
| Методические рекомендации - - - - -                                                             | 4          |
| <b>12. Ряды - - - - -</b>                                                                       | <b>7</b>   |
| 12.1. Числовые ряды. Признаки сходимости числовых рядов - - - - -                               | 7          |
| 12.2. Функциональные и степенные ряды - - - - -                                                 | 18         |
| 12.3. Формулы и ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды - - - - -         | 27         |
| 12.4. Степенные ряды в приближенных вычислениях - - - - -                                       | 33         |
| 12.5. Ряды Фурье - - - - -                                                                      | 40         |
| 12.6. Индивидуальные домашние задания к гл. 12 - - - - -                                        | 51         |
| 12.7. Дополнительные задачи к гл. 12 - - - - -                                                  | 148        |
| <b>13. Кратные интегралы - - - - -</b>                                                          | <b>150</b> |
| 13.1. Двойные интегралы и их вычисление - - - - -                                               | 150        |
| 13.2. Замена переменных в двойном интеграле. Двойные интегралы в полярных координатах - - - - - | 159        |
| 13.3. Приложения двойных интегралов - - - - -                                                   | 163        |
| 13.4. Тройной интеграл и его вычисление - - - - -                                               | 173        |
| 13.5. Приложения тройных интегралов - - - - -                                                   | 179        |
| 13.6. Индивидуальные домашние задания к гл. 13 - - - - -                                        | 184        |
| 13.7. Дополнительные задачи к гл. 13 - - - - -                                                  | 223        |
| <b>14. Криволинейные интегралы - - - - -</b>                                                    | <b>226</b> |
| 14.1. Криволинейные интегралы и их вычисление - - - - -                                         | 226        |
| 14.2. Приложения криволинейных интегралов - - - - -                                             | 237        |
| 14.3. Индивидуальные домашние задания к гл. 14 - - - - -                                        | 242        |
| 14.4. Дополнительные задачи к гл. 14 - - - - -                                                  | 269        |
| <b>15. Элементы теории поля - - - - -</b>                                                       | <b>271</b> |
| 15.1. Векторная функция скалярного аргумента. Производная по направлению и градиент - - - - -   | 271        |
| 15.2. Скалярные и векторные поля - - - - -                                                      | 278        |
| 15.3. Поверхностные интегралы - - - - -                                                         | 282        |
| 15.4. Поток векторного поля через поверхность. Дивергенция векторного поля - - - - -            | 291        |
| 15.5. Циркуляция векторного поля. Ротор векторного поля - - - - -                               | 296        |
| 15.6. Дифференциальные операции второго порядка. Классификация векторных полей - - - - -        | 302        |
| 15.7. Индивидуальные домашние задания к гл. 15 - - - - -                                        | 308        |
| 15.8. Дополнительные задачи к гл. 15 - - - - -                                                  | 337        |
| Приложения - - - - -                                                                            | 340        |
| Рекомендуемая литература - - - - -                                                              | 366        |

Учебное издание

## **ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ**

**В четырех частях**

**Часть 3**

**Рябушко Антон Петрович  
Бархатов Виктор Владимирович  
Державец Вера Владимировна  
Юреть Иван Ефимович**

**Ряды.**

**Кратные и криволинейные интегралы.  
Элементы теории поля**

**Учебное пособие**

Редактор *Е.В. Малышева*  
Художественный редактор *В.А. Ярошевич*  
Технический редактор *Н.А. Лебедев*  
Корректор *В.И. Аверкина*  
Набор и компьютерная верстка *Ю.Л. Шибановой*

Подписано в печать 09.01.2013. Формат 84×108/32.

Бумага для офсетной печати. Гарнитура «Ньютон». Офсетная печать. Усл. печ. л. 19,32.

Уч.-изд. л. 18,01. Тираж 1500 экз. Заказ 90.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Вышэйшая школа”».

ЛИ № 02330/0494062 от 03.02.2009. Пр. Победителей, 11, 220048, Минск.

e-mail: [market@vshph.com](mailto:market@vshph.com) <http://vshph.com>

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Белорусский Дом печати”».

ЛП № 02330/0494179 от 03.04.2009. Пр. Независимости, 79, 220013, Минск.