

Г. Н. Солтан А. Е. Солтан

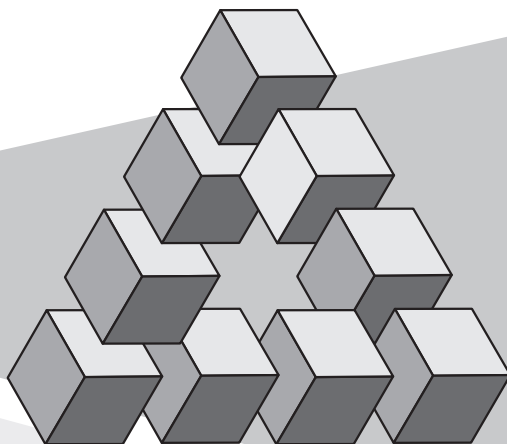
АЛГЕБРА

для самоподготовки

8

КЛАСС

Пособие
для учащихся учреждений
общего среднего образования



Минск
«Вышэйшая школа»
2023

УДК 512(075.3/.4)
ББК 22.14я721
С60

Рецензент: заведующий кафедрой информационных технологий
ГУО «Минский городской институт развития образования» кандидат педаго-
гических наук, доцент *Т.О. Пучковская*

*Все права на данное издание защищены. Воспроизведение всей книги или
любой ее части не может быть осуществлено без разрешения издательства.*

ISBN 978-985-06-3496-2

© Солтан Г.Н., Солтан А.Е., 2023
© Оформление. УП «Издательство
“Вышэйшая школа”», 2023

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дорогие восьмиклассники! В этом учебном году вы продолжите изучать алгебру, расширите свои знания о множествах чисел, функциях, методах решения уравнений и неравенств. В данное пособие включены разделы: «Квадратные корни и их свойства. Действительные числа», «Квадратные уравнения», «Квадратичная функция и ее свойства. Квадратные неравенства», «Элементы комбинаторики» (является дополнительным материалом), а также подразделы для повторения курсов алгебры 7 и 8 классов. Каждый раздел начинается с целевых установок, что надо знать и уметь в результате его изучения.

В каждой теме этих разделов, кроме подразделов для повторения материала 7 и 8 классов, содержится:

- 1) новый теоретический материал с заданиями для его лучшего понимания и активного изучения;
- 2) образцы решений примеров и задач;
- 3) контрольные вопросы для проверки усвоения теории;
- 4) упражнения трех уровней сложности *A*, *B* и *C* для формирования практических умений и навыков, а также «Занимательные задачи»;
- 5) упражнения для повторения ранее изученного материала, которые обозначены символом $\cup$.

В теоретическом материале определения понятий (которые взяты в рамку), теоремы, алгебраические правила выделены специальными шрифтами. Упражнения уровня *C* предназначены для развития математических способностей и

умений применять алгебраические знания в нестандартных ситуациях. Они, как и «Занимательные задачи», не являются обязательными для всех и адресованы тем, кому это интересно.

В последних темах разделов предлагаются упражнения для их повторения, предназначенные для систематизации знаний по алгебре и подготовки к контрольным работам, в том числе специальные задания под рубрикой *«Проверь себя!»*.

В конце каждого раздела имеются «Исторические сведения», где дается познавательный материал о становлении алгебры как науки и вкладе знаменитых ученых в ее развитие. В учебное пособие включены сюжетные задачи, содержащие сведения о заповедниках и других достопримечательностях Беларуси. Решая их, вы можете расширить знания о своей стране.

К упражнениям даются ответы и указания к поиску решения более трудных задач.

Надеемся, что учебное пособие, которое вы держите в руках, будет вам верным помощником в изучении алгебры.

Желаем успехов!

Авторы

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ 7 КЛАССА

Степени с целыми показателями

Определение	Свойства
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множителей}},$ $n \in \mathbf{N}, \quad n > 1;$ $a^1 = a; \quad a^0 = 1, \quad a \neq 0;$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad a \neq 0$	$a^p \cdot a^k = a^{p+k}, \quad a^p : a^k = a^{p-k},$ $(a^p)^k = a^{p \cdot k}, \quad (ab)^p = a^p \cdot b^p,$ $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0,$ $p \in \mathbf{Z}, \quad k \in \mathbf{Z}$

Формулы сокращенного умножения

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$
3. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$
4. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$
5. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$
6. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$
7. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$

Свойства степени с целым показателем и формулы сокращенного умножения являются тождествами. **Тождество** – это равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных. Верное числовое равенство также считается тождеством.

Произведение чисел и степеней переменных с натуральными показателями называется **одночленом**. Алгебраическая сумма одночленов называется **многочленом**.

Линейное уравнение с одной переменной

Это уравнение вида $ax + b = 0$, где x – переменная, a и b – числа (табл. 1).

Таблица 1

Количество корней уравнения $ax + b = 0$	Примеры
При $a \neq 0$ один корень: $x = -\frac{b}{a}$	$7x - 2,1 = 0$, $7x = 2,1$, $x = 0,3$. Ответ: 0,3
При $a = 0$, $b \neq 0$, $0x = -b$ нет корней	$2x + 5 = 0,5 + 2x$, $2x - 2x = 0,5 - 5$, $0x = -4,5$. Ответ: нет корней
При $a = 0 = b$, $0x = 0$ бесконечно много корней	$0,5x - \frac{3}{4} = -0,75 + \frac{1}{2}x$, $0,5x - \frac{1}{2}x = -0,75 + \frac{3}{4}$, $0x = 0$. Ответ: любое число

Числовые неравенства и их свойства

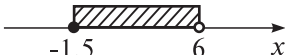
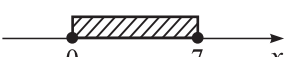
Число a больше числа b , если разность $a - b > 0$; число a меньше числа b , если разность $a - b < 0$.

Свойства числовых неравенств.

1. Если $a > b$, то $a = b + c$, где $c > 0$; если $a = b + c$, где $c > 0$, то $a > b$.
2. Если $a > b$, то $b < a$.
3. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.
4. Если $a > b$ и c – любое число, то $a + c > b + c$.
5. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.
6. Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$.
7. Если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$.
8. Если $a > b > 0$ и $c > d > 0$, то $ac > bd$.
9. Если $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Числовые промежутки и их обозначения приведены в табл. 2.

Таблица 2

Числовой промежуток	Рисунок на координатной прямой	Обозначение числового промежутка
$-2 < x < 5$		$x \in (-2; 5)$
$-1,5 \leq x < 6$		$x \in [-1,5; 6)$
$0 \leq x \leq 7$		$x \in [0; 7]$
$x \geq 3$		$x \in [3; +\infty)$
$x < -1$		$x \in (-\infty; -1)$

Функция

Зависимость переменной y от переменной x называется **функцией**, если каждому значению x из некоторого множества чисел соответствует единственное значение y . Независимую переменную x называют также **аргументом**, а зависимую переменную y – **функцией этого аргумента** (рис. 1).

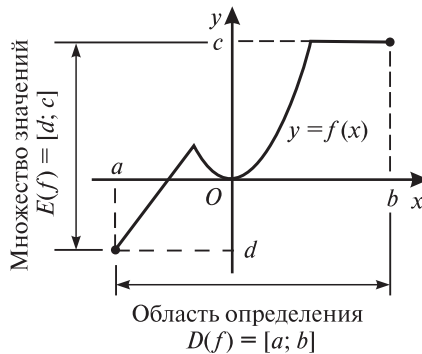


Рис. 1

Линейная функция $y = kx + b$

График линейной функции $y = kx + b$ приведен на рис. 2.

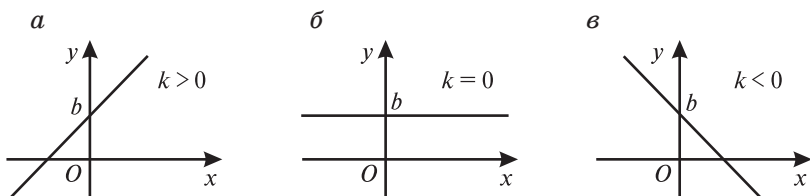


Рис. 2

Решение систем двух линейных уравнений $\begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$

Графическая иллюстрация решения систем двух линейных уравнений $\begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$ приведена на рис. 3.

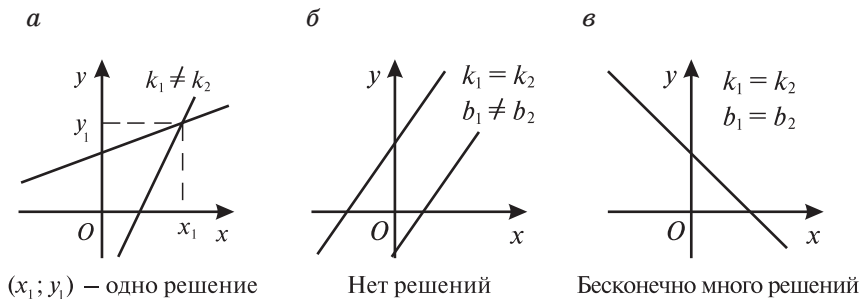


Рис. 3

Упражнения

Уровень А

1. На сколько процентов площадь Беларуси ($207\,600 \text{ км}^2$) больше суммы площадей Литвы ($65\,286 \text{ км}^2$), Латвии ($64\,589 \text{ км}^2$) и Эстонии ($45\,227 \text{ км}^2$) (рис. 4)? Ответ округлите до целых.



Рис. 4

2. Вычислите:

а) $-5 + 0,2^{-2}$;	в) $4^{-2} : \frac{-1}{64}$;
б) $7^{-1} - 21^{-1}$;	г) $(0,008)^0 : (-3)^{-3}$.
3. Выполните действия:

а) $(1,5a^{-2}b) \cdot (4a^3b^{-4})$;	в) $(0,2cd^3)^2$;
б) $(49x^5y^{-1}) : (0,7x^3y^{-2})$;	г) $(8p^{-3}k^2 \cdot 0,5pk^{-2})^{-3}$.
4. Представьте числа в стандартном виде и расположите их в порядке возрастания:

а) $0,59 \cdot 10^{-7}$; $3400 \cdot 10^{-9}$; $0,078 \cdot 10^{-10}$;	б) $42 \cdot 10^{-15}$; $0,073 \cdot 10^{-17}$; $8300 \cdot 10^{-16}$.
---	---
5. а) Для распечатки 476 плакатов были использованы две копировальные машины. Первая работала 14 мин, а вторая – 21 мин. Сколько плакатов в минуту копировала каждая машина, если первая печатала в минуту на 4 плаката больше, чем вторая?
 б) Весенний сев бригада наметила закончить за 8 дней. Но, увеличив норму сева на 40 га в день, бригада закончила сев за 6 дней. Сколько гектаров засеивала ежедневно бригада и сколько гектаров засеяно?

6. а) Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если эти цифры поменять местами, то полученное число будет больше исходного на 18. Найдите первоначальное число.
 б) В двузначном числе цифра десятков, увеличенная на 2, в 2 раза больше цифры единиц. Если же их поменять местами, то полученное число будет меньше исходного на 27. Найдите исходное число.

Уровень В

7. Найдите значение выражения:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{4^8 \cdot 9^7 + 6^{12} \cdot 180}{8^6 \cdot 3^{14} - 6^{14}}; & \text{в) } \frac{26 \cdot (3 \cdot 2^{18} + 15 \cdot 2^{15})}{(13 \cdot 4^4)^2}; \\ \text{б) } \frac{6^{10} \cdot 2^8 + 12^9 \cdot 21}{3^{10} \cdot 2^{19} - 12^{10}}; & \text{г) } \frac{21 \cdot (3 \cdot 7^{12} - 14 \cdot 7^{11})}{(3 \cdot 7^6)^2}. \end{array}$$

8. Что больше:

$$\text{а) } \frac{4^{12} - 1}{4^{11} - 1} \text{ или } \frac{4^{11} - 1}{4^{10} - 1}; \quad \text{б) } \frac{9^6 - 1}{9^7 - 1} \text{ или } \frac{9^7 - 1}{9^8 - 1}?$$

9. При делении натурального числа b на 7 получается остаток 3. Какой остаток получится при делении выражения $b^2 - 7b + 15$ на 7?
10. а) Найдите среднюю скорость движения поезда, если первую половину пути он шел со скоростью 81 км/ч, а вторую – со скоростью 99 км/ч.
 б) При движении из пункта А в пункт В автобус первую половину пути шел со скоростью 50 км/ч, а вторую – со скоростью 75 км/ч. Из пункта В в пункт А автобус шел со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автобуса на всем пути.
11. а) При совместной работе двух подъемных кранов баржа была загружена за 2 ч. Сколько времени потребуются на загрузку такой же баржи каждым краном, если одним краном баржу можно загрузить за 3 ч быстрее, чем другим?

б) Два станка выполняют некоторую работу за 6 ч. Сколько часов потребуется для выполнения этой работы каждым станком, если один может выполнить ее на 5 ч быстрее другого?

12. а) Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 3 км, отправился пешеход, а через 30 мин вслед за ним выехал велосипедист со скоростью больше на 11 км/ч. В пункт B велосипедист прибыл на 3 мин раньше пешехода. Найдите скорость велосипедиста.

б) Из поселка в город, расстояние между которыми 5 км, отправился велосипедист, а через 15 мин вслед за ним выехал мотоциклист со скоростью больше на 20 км/ч. В город мотоциклист приехал на 5 мин раньше велосипедиста. Найдите скорость велосипедиста.

Уровень С

13. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения:

а) $11^{n+4} - 11^n$ делится на 61; б) $7^{n+3} + 7^n$ делится на 43.

14. Укажите область определения и постройте график функции:

а) $y = -2x + x^0$; б) $y = -2x^0 + 5$; в) $y = -|x|$.

15. Докажите, что является составным числом значение выражения:

а) $2^{14} + 7^{16}$; б) $2^{10} + 11^{12}$.

Занимательные задачи

16. Вычислите, используя формулу разности квадратов двух выражений:

а) $(11 + 1)(11^2 + 1)(11^4 + 1)(11^8 + 1) - 0,1 \cdot 11^{16}$;

б) $0,04 \cdot 26^{32} - (26^{16} + 1)(26^8 + 1)(26^4 + 1)(26^2 + 1)(26 + 1)$.



КВАДРАТНЫЕ КОРНИ И ИХ СВОЙСТВА. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

В РЕЗУЛЬТАТЕ ИЗУЧЕНИЯ РАЗДЕЛА НАДО:



ЗНАТЬ

- **определения:** рационального, иррационального и действительного чисел; квадратного и арифметического квадратного корней;
- **понятия** системы и совокупности линейных неравенств с одной переменной;
- **свойства** действий над действительными числами и арифметическими квадратными корнями;
- **свойства** и график функции $y = \sqrt{x}$.



УМЕТЬ

- **выполнять** арифметические действия над действительными числами и сравнивать их;
- **доказывать** свойства арифметического квадратного корня;
- **выполнять** тождественные преобразования выражений, содержащих квадратные корни;
- **решать** системы и совокупности линейных неравенств с одной переменной;
- **строить** график функции $y = \sqrt{x}$;
- **применять** свойства действительных чисел при решении задач.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ПОВТОРЕНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ 7 КЛАССА	5
I. КВАДРАТНЫЕ КОРНИ И ИХ СВОЙСТВА.	
ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА	12
1. Рациональные числа и дроби	13
1.1. Рациональные числа	13
1.2. Рациональные дроби	14
2. Иррациональные и действительные числа.	20
3. Квадратные корни	29
4. Свойства квадратных корней	40
5. Преобразования выражений, содержащих квадратные корни	52
6. Функция $y = \sqrt{x}$, ее свойства и график	61
7. Числовые промежутки. Системы и совокупности линейных неравенств с одной переменной	67
8. Упражнения для повторения раздела «Квадратные корни и их свойства. Действительные числа»	76
II. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ	84
9. Квадратные уравнения. Неполные квадратные уравнения . . .	85
10. Формулы корней квадратного уравнения	92
11. Теорема Виета	100
12. Разложение квадратного трехчлена на множители	107
13. Решение текстовых задач с использованием квадратных уравнений	113
14. Уравнения, приводимые к квадратным уравнениям	117
15. Упражнения для повторения раздела «Квадратные уравнения»	124
III. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА.	
КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА	130
16. Определение квадратичной функции. Функция $y = ax^2 + n$ и ее график	131
17. Функция $y = a(x - m)^2$ и ее график	142
18. Функция $y = a(x - m)^2 + n$ и ее график	149
	245

19. Функция $y = ax^2 + bx + c$ и ее график	156
20. Решение квадратных неравенств	166
21. Системы и совокупности нелинейных неравенств с одной переменной	176
22. Функции $y = \frac{k}{x}$, $y = ax^3$ и их свойства.....	185
22.1. Функция $y = \frac{k}{x}$ и ее график	185
22.2. Функция $y = ax^3$ и ее график	188
23. Упражнения для повторения раздела «Квадратичная функция и ее свойства. Квадратные неравенства»	194
IV. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ	201
24. Основные понятия комбинаторики	202
25. Правила комбинаторики.....	206
26. Перестановки без повторений.....	211
27. Упражнения для повторения раздела «Элементы комбинаторики».....	217
УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА АЛГЕБРЫ 8 КЛАССА	220
ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ	227

Солтан, Г. Н.

С60 Алгебра для самоподготовки : 8-й класс : пособие для учащихся учреждений общего среднего образования / Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан. – Минск : Вышэйшая школа, 2023. – 246 с. : ил.

ISBN 978-985-06-3496-2.

Пособие написано в соответствии с программой по математике для учреждений общего среднего образования. В нем изложен курс алгебры 8 класса в доступной, познавательной и интересной форме. Теория сопровождается примерами и задачами с решениями. К каждой теме предлагаются упражнения трех уровней сложности и занимательные задачи, в том числе олимпиадного характера, которые в дальнейшем помогут подготовиться к экзаменам и тестам, а также развить математические способности учащихся.

Для учащихся учреждений общего среднего образования (школы, гимназии), абитуриентов. Будет полезно для самостоятельной работы учащихся.

**УДК 512(075.3/.4)
ББК 22.14я721**

Учебное издание

Солтан Геннадий Николаевич
Солтан Алла Евгеньевна

АЛГЕБРА ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ
8 класс

Пособие для учащихся общеобразовательных учреждений

Редактор *Т.В. Кульнис*
Художественный редактор *Т.Ю. Таран*
Компьютерная верстка *Ю.Н. Трусевич*
Корректор *Т.В. Кульнис*

Подписано в печать 29.05.2023. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.

Гарнитура «SchoolBook». Печать офсетная. Усл. печ. л. 14,42.

Уч.-изд. л. 10,4. Тираж 800 экз. Заказ 243.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Вышэйшая школа”».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/3 от 08.07.2013.

Пр. Победителей, 11, 220004, Минск.

e-mail: market@vshph.com <http://vshph.com>

Открытое акционерное общество «Промпечать».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 2/21 от 29.11.2013.

Ул. Гикало, 5, корп. 10, пом. 3, 220005, Минск.