

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия
для студентов учреждений высшего образования
по математическим специальностям

В ТРЕХ ЧАСТЯХ
ЧАСТЬ 2



Минск
«Вышэйшая школа»
2023

УДК 517(075.8)

ББК 22.161я73

М34

Авторы части: С. А. Бондарев, Ю. В. Васильев, В. Г. Кротов,
Т. С. Мардвилко, А. Д. Стриленко

Рецензенты: кафедра фундаментальной и прикладной математики Гродненского государственного университета имени Янки Купалы (заведующий кафедрой доктор физико-математических наук *Е.А. Ровба*); доктор физико-математических наук, профессор *А.П. Старовойтов*

Все права на данное издание защищены. Воспроизведение всей книги или любой ее части не может быть осуществлено без разрешения издательства.

ISBN 978-985-06-3533-4 (ч. 2)

ISBN 978-985-06-3484-9

© Оформление. УП «Издательство
“Вышэйшая школа”», 2023

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу данного сборника легли практические занятия по дисциплине «Математический анализ», которые авторы пособия проводят для студентов механико-математического факультета Белорусского государственного университета. Авторы также включили в сборник необходимые теоретические сведения, которые представляют выдержки из курса лекций по «Математическому анализу» одного из авторов [9].

Предлагаемая читателю ч. 2 пособия состоит из пяти глав. Каждая глава объединяет несколько разделов, которые приблизительно соответствуют одному практическому занятию.

В каждой главе пособия вы найдете подробно разобранные примеры решения типовых задач, задания для аудиторной и самостоятельной работы, краткие теоретические сведения по математическому анализу, необходимые для решения задач, а также задания повышенной сложности.

Авторы благодарят профессоров Е.А. Ровбу и А.П. Старовойтова, а также доцента кафедры фундаментальной и прикладной математики В.Р. Мисюка за внимательное рецензирование данного пособия.

Будем благодарны всем, кто укажет на возможные неточности в тексте и внесет предложения по его улучшению.

Пожелания, предложения и замечания просим направлять по электронному адресу: mardvilko@gmail.com

Глава 1

ИНТЕГРАЛ РИМАНА

1.1. Понятие интеграла Римана

Пусть задан отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$, причем $a < b$.

Разбиением отрезка называется любой упорядоченный набор различных точек из этого отрезка, включающий его концы:

$$\Pi := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}. \quad (1.1)$$

Рангом разбиения называется число

$$\lambda = \lambda_\Pi := \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}),$$

характеризующее степень измельчения отрезка при его разбиении.

Разбиение Π отрезка $[a, b]$ дает его представление в виде объединения

$$[a, b] = \bigcup_{k=1}^n [x_{k-1}, x_k].$$

Отрезки $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$, будем называть **частичными**. Ранг разбиения характеризует степень измельчения отрезка точками разбиения.

Если задано разбиение Π отрезка $[a, b]$ и на каждом частичном отрезке зафиксирована точка

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, \dots, n,$$

то обозначим $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ и пару (Π, ξ) назовем **разбиением с отмеченными точками**.

Если задана функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и разбиение (Π, ξ) отрезка $[a, b]$ с отмеченными точками, то сумма

$$s = s(\Pi, \xi) = s_f(\Pi, \xi) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad (1.2)$$

называется **интегральной суммой** Римана функции f , соответствующей разбиению (Π, ξ) с отмеченными точками.

Пусть функция f задана на отрезке $[a, b]$. Число I называется **пределом интегральных сумм**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (\Pi, \xi) \quad \lambda_\Pi < \delta \implies |s_f(\Pi, \xi) - I| < \varepsilon. \quad (1.3)$$

Краткая запись этого следующая: $I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} s$. Число I называется **определенным интегралом Римана** функции f по отрезку $[a, b]$ и обозначается

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f dx. \quad (1.4)$$

В случае существования интеграла будем говорить также, что функция f **интегрируема (по Риману)** на $[a, b]$. Класс всех интегрируемых на $[a, b]$ функций обозначим $R[a, b]$.

В обозначении определенного интеграла (1.4) a называется **нижним пределом интегрирования**, b — **верхним пределом интегрирования**, f — **подынтегральной функцией**, $f(x) dx$ — **подынтегральным выражением**.

Отметим, что если функция не является ограниченной на $[a, b]$, то при фиксированном разбиении интегральная сумма может быть сделана сколь угодно большой за счет выбора одной из отмеченных точек. Поэтому в таком случае предел интегральных сумм не существует и неограниченные функции не входят в класс $R[a, b]$.

Другими словами, ограниченность функции f на $[a, b]$ является необходимым условием интегрируемости.

Пусть функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена на $[a, b]$, Π — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$. Величины

$$s_*(\Pi) := \inf_{\xi} s(\Pi, \xi), \quad s^*(\Pi) := \sup_{\xi} s(\Pi, \xi) \quad (1.5)$$

называются соответственно **нижней и верхней суммами Дарбу** для f , отвечающими заданному разбиению Π .

При заданном разбиении Π суммы Дарбу показывают возможную степень разброса интегральных сумм, получаемую за счет свободы в выборе отмеченных точек ξ_k .

Решение типовых задач

1. Для интеграла

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

найти верхние и нижние суммы Дарбу, соответствующие разбиению отрезка $[0, \pi]$:

- 1) на 3 равные части;
- 2) на 6 равных частей.

Решение. 1) Разобьем отрезок $[0, \pi]$ на 3 равные части:

$$0 < \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{3} < \pi.$$

Обозначим m_k и M_k ($k = 1, 2, 3$) соответственно наименьшее и наибольшее значение функции $y = \sin x$ на k -м частичном отрезке. Зная промежутки монотонности функций $y = \sin x$, найдем:

$$\begin{aligned} \left[0, \frac{\pi}{3}\right] : \quad m_1 &= \sin 0 = 0, \quad M_1 = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] : \quad m_2 &= \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad M_2 = \sin \frac{\pi}{2} = 1; \\ \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right] : \quad m_3 &= \sin \pi = 0, \quad M_3 = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Итак, нижняя сумма Дарбу

$$s_3 = \sum_{k=1}^3 m_k \Delta x_k = \frac{\pi}{3} \left(0 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \approx 0,907,$$

верхняя сумма Дарбу

$$S_3 = \sum_{k=1}^3 M_k \Delta x_k = \frac{\pi}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi(\sqrt{3} + 1)}{3} \approx 2,86.$$

2) Разобьем отрезок $[0, \pi]$ на 6 равных частей:

$$0 < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} < \frac{5\pi}{6} < \pi.$$

Найдем наименьшее и наибольшее значение функции на каждом частичном отрезке:

$$\begin{array}{lll} \left[0, \frac{\pi}{6}\right] : & m_1 = \sin 0 = 0, & M_1 = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; \\ \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] : & m_2 = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, & M_2 = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right] : & m_3 = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, & M_3 = \sin \frac{\pi}{2} = 1; \\ \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right] : & m_4 = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, & M_4 = \sin \frac{\pi}{2} = 1; \\ \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right] : & m_5 = \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}, & M_5 = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right] : & m_6 = \sin \pi = 0, & M_6 = \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}. \end{array}$$

Итак, нижняя сумма Дарбу

$$s_6 = \sum_{k=1}^6 m_k \Delta x_k = \frac{\pi}{6} (1 + \sqrt{3}) \approx 1,43,$$

верхняя сумма Дарбу

$$S_6 = \sum_{k=1}^3 M_k \Delta x_k = \frac{\pi}{6} (3 + \sqrt{3}) \approx 2,48.$$

Отметим, что

$$s_3 < s_6 < \int_0^\pi \sin x \, dx < S_6 < S_3.$$

2. Вычислить по определению следующие интегралы:

$$1) \int_0^1 x \, dx; \quad 2) \int_1^2 \frac{dx}{x}; \quad 3) \int_a^b \frac{dx}{x^2}, \quad b > a > 0.$$

Решение. Заметим, что все три подынтегральные функции непрерывны на отрезках интегрирования, следовательно, интегрируемы. Интеграл Римана не зависит от способа разбиения отрезка интегрирования на части и выбора отмеченных точек на каждом частичном отрезке.

1) По определению

$$\int_0^1 x \, dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \xi_k \Delta x_k,$$

где $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \{\Delta x_k\}$, $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Разобьем отрезок $[0, 1]$ на n равных частей точками:

$$x_k = \frac{k}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Ранг разбиения

$$\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \{\Delta x_k\} = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Выберем $\xi_k = \frac{k}{n}$ — правые концы частичных отрезков.

Составим интегральную сумму:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1+n}{2} \cdot n = \frac{1+n}{2n}.$$

По определению

$$\int_0^1 x dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

2) Разобьем отрезок $[0, 1]$ на n частей точками, образующими геометрическую прогрессию:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = q, \quad x_2 = q^2, \quad \dots, \quad x_n = q^n = 2.$$

Следовательно, $q = \sqrt[n]{2}$, а длина частичного отрезка

$$\Delta x_k = q^k - q^{k-1} = q^{k-1}(q - 1) = 2^{\frac{k-1}{n}} \left(2^{\frac{1}{n}} - 1 \right).$$

Ранг разбиения

$$\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \{\Delta x_k\} = 2^{\frac{n-1}{n}} \left(2^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

В качестве ξ_k возьмем середины частичных отрезков:

$$\xi_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2} = \frac{q^k + q^{k-1}}{2}.$$

Составим интегральную сумму:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\xi_k} \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \frac{2}{q^{k-1}(q+1)} q^{k-1}(q-1) = \\ &= 2n \frac{q-1}{q+1} = 2n \frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{2}+1}. \end{aligned}$$

По определению интеграла Римана

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_n = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{2}+1} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} n \frac{1}{n} \ln 2 = \ln 2.$$

3) Рассмотрим произвольное разбиение отрезка $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

В качестве точек ξ_k возьмем

$$\xi_k = \sqrt{x_k x_{k-1}}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Составим интегральную сумму:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\xi_k^2} \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \frac{x_k - x_{k-1}}{x_k x_{k-1}} = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{x_{k-1}} - \frac{1}{x_k} \right) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}. \end{aligned}$$

По определению интеграла Римана

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_n = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

3. Найдите пределы:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right);$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{(2n)^2} \right).$

Решение. 1) Заметим, что выражение

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{1 + \frac{n}{n}} \right)$$

является интегральной суммой для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на отрезке $[1, 2]$, разбитом на n равных частей, с точками ξ_k ($k = 1, \dots, n$) — правыми концами частичных отрезков.

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right) = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2.$$

2) Преобразуем выражение под знаком предела:

$$\begin{aligned} & n \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^2} + \dots + \frac{1}{\left(1 + \frac{n}{n}\right)^2} \right). \end{aligned}$$

Последняя сумма является интегральной суммой для функции $f(x) = \frac{1}{x^2}$ на отрезке $[1, 2]$, разбитом на n равных частей, с точками $\zeta_k (k = 1, \dots, n)$ — правыми концами частичных отрезков.

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{(2n)^2} \right) = \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

4. Вычислить интегралы, используя геометрический смысл интеграла Римана:

$$1) \int_0^3 \sqrt{9 - x^2} dx;$$

$$2) \int_0^{\pi} \sin 2x dx.$$

Решение. 1) Графиком функции

$$y = \sqrt{9 - x^2}, \quad x \in [0, 3],$$

является дуга окружности, лежащая в первой координатной четверти.

Из геометрического смысла интеграла Римана следует, что искомый интеграл численно равен площади криволинейной трапеции (рис. 1.1), ограниченной кривыми:

$$y = \sqrt{9 - x^2}, \quad y = 0 \quad (0 \leq x \leq 3), \quad x = 0.$$

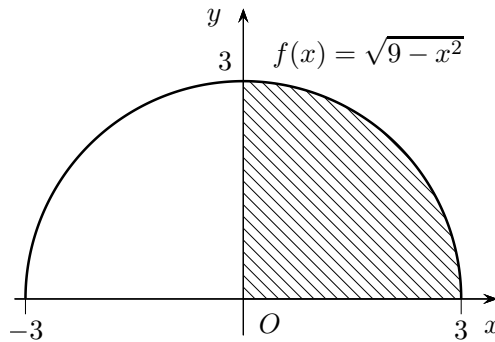


Рис. 1.1

Следовательно,

$$\int_0^3 \sqrt{9 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi \cdot 3^2 = \frac{9\pi}{4}.$$

2) Из свойства аддитивности интеграла Римана

$$\int_0^{\pi} \sin 2x dx = \int_0^{\pi/2} \sin 2x dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin 2x dx = J_1 + J_2.$$

Интеграл J_1 численно равен площади криволинейной трапеции T_1 , а интеграл J_2 — площади T_2 , взятой со знаком минус (рис. 1.2). Поскольку площади T_1 и T_2 равны, то

$$\int_0^{\pi} \sin 2x dx = 0.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. ИНТЕГРАЛ РИМАНА	4
1.1. Понятие интеграла Римана	4
1.2. Основные методы интегрирования	21
1.3. Длина дуги кривой	35
1.4. Вычисление площадей на плоскости	43
1.5. Объем. Площадь поверхности	62
1.6. Несобственные интегралы	71
1.7. Абсолютная и условная сходимость	89
Глава 2. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ	104
2.1. Предел функции многих переменных	104
2.2. Дифференцируемость. Частные производные	124
2.3. Производная по направлению. Градиент	139
2.4. Производные и дифференциалы высших порядков	146
2.5. Экстремумы функций многих переменных	159
2.6. Дифференцируемые векторные функции	183
2.7. Обратные и неявные отображения	196

Глава 3. Числовые ряды	207
3.1. Сходимость числового ряда. Критерий Коши . . .	207
3.2. Признаки сравнения, Даламбера и Коши	225
3.3. Признаки Раабе, Гаусса, интегральный	241
3.4. Знакопеременные ряды	250
Глава 4. Функциональные ряды	260
4.1. Равномерная сходимость последовательностей . .	260
4.2. Равномерная сходимость рядов	270
4.3. Свойства суммы ряда	283
4.4. Степенные ряды	296
4.5. Разложение функций в степенные ряды	307
Глава 5. Ряды ФУРЬЕ	321
5.1. Ряды Фурье 2π -периодических функций	321
5.2. Ряды Фурье $2l$ -периодических функций	337
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	349
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ	352

Математический анализ. Задачи и упражнения : учеб-
М34 ное пособие. В 3 ч. Ч. 2 / С.А. Бондарев [и др.]. — Минск :
Вышэйшая школа, 2023. — 355 с.

ISBN 978-985-06-3533-4

Излагается материал для практических и лабораторных занятий по дисциплине «Математический анализ», изучаемой на математических специальностях учреждений высшего образования Республики Беларусь. Приводятся также краткие теоретические сведения по математическому анализу, необходимые для решения задач. В части 2 пособия рассмотрены темы «Интеграл Римана», «Дифференцируемые функции нескольких переменных и векторные функции», «Числовые ряды», «Функциональные ряды» и «Ряды Фурье».

Для студентов учреждений высшего образования по математическим специальностям.

УДК 517(075.8)

ББК 22.161я73

Учебное издание

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.
ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ**

Учебное пособие

В трех частях
Часть 2

Бондарев Сергей Александрович
Васильев Юрий Валерьевич
Кротов Вениамин Григорьевич
Мардвилко Татьяна Сергеевна
Стриленко Артем Дмитриевич

Редактор *Т.К. Хваль*
Художественный редактор *С.Д. Чирков*
Компьютерная верстка *А.Д. Стриленко*
Корректор *Т.К. Хваль*

Подписано в печать 29.06.2023. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 20,93. Уч.-изд. л. 18,3. Тираж 250 экз.
Заказ 2487.

Республиканское унитарное предприятие
«Издательство "Вышэйшая школа"».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/3 от 08.07.2013.

Пр. Победителей, 11, 220004, Минск.
e-mail: market@vshph.com [http:// vshph.com](http://vshph.com)

Открытое акционерное общество «Типография "Победа"».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 2/38 от 29.01.2014.
Ул. Тавлая, 11, 222310, Молодечно.



ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»

Для всех, кто учится и учит!

Выпускаемая литература:

- ◆ учебная;
- ◆ справочная;
- ◆ учебно-методическая;
- ◆ научная;
- ◆ научно-популярная;
- ◆ производственно-практическая.

Наши книги:

- ◆ по всем отраслям знаний;
- ◆ для преподавателей и студентов всех ступеней образования;
- ◆ специалистов-практиков и широкого круга читателей.



 vshph.com



 [vshph_com](https://www.instagram.com/vshph_com)

Заказать книги по издательской цене (включая доставку):

УП «Издательство «Вышэйшая школа»

пр-т Победителей, 11, к. 815

220004, г. Минск, Республика Беларусь

Тел.: (+375-17) 203-67-38, факс: (+375-17) 203-99-35

e-mail: market@vshph.com