

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Утверждено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебника для студентов
учреждений высшего образования
по математическим специальностям

Минск



«Адукацыя і выхаванне»

2024

УДК 517.53/.55(075.8)
ББК 22.161.5я73
Т33

Авторы: *В. Г. Кротов, Е. А. Ровба, А. П. Старовойтов, Е. А. Сетько, К. А. Смотрицкий*

Рецензенты: кафедра математики и методики преподавания математики физико-математического факультета УО «Белорусский государственный педагогический университет» (заведующий кафедрой кандидат физико-математических наук, доцент *Н.В. Гриб*)

Теория функций комплексного переменного : учебник / В. Г. Кротов [и др.]. – Минск : Адукацыя і выхаванне, 2024. – 448 с. : ил. ISBN 978-985-06-3572-3.

Изложен материал по дисциплинам «Теория функций комплексного переменного» и «Ряды и функции комплексного аргумента», изучаемые на математических специальностях учреждений высшего образования Республики Беларусь.

Учебник содержит теоретический лекционный материал, а также четырехуровневый набор заданий для практических и лабораторных занятий (задания для аудиторной работы, базовые индивидуальные задания, задания для самостоятельной работы и задания творческого характера).

Для студентов и преподавателей. Может быть использован магистрантами, аспирантами и научными работниками, интересующимися комплексным анализом и его приложениями.

УДК 517.53/.55(075.8)
ББК 22.161.5я73

Учебное издание

Кротов Вениамин Григорьевич
Ровба Евгений Алексеевич
Старовойтов Александр Павлович и др.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебник

Редакторы *И.В. Тургель, Ю.А. Мисюль*. Художественный редактор *С.Д. Чирков*.
Компьютерная верстка *К.А. Смотрицкого*. Корректор *Т.К. Хваль*.

Подписано в печать 09.04.2024. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 26,04. Уч.-изд. л. 20,0. Тираж 300 экз. Заказ 605.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство «Адукацыя і выхаванне»».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/19 от 02.08.2013. Ул. Будённого, 21, 220070, г. Минск.

Производственное дочернее унитарное предприятие «Типография Федерации профсоюзов Беларуси».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 2/18 от 26.11.2013. Пл. Свободы, 23-103, 220030, г. Минск.

ISBN 978-985-06-3572-3

© Оформление. Республиканское унитарное предприятие «Издательство «Адукацыя і выхаванне»», 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|-----------------------|----|
| Предисловие | 11 |
|-----------------------|----|

Часть I. ТЕОРИЯ

| | |
|---|-----------|
| Глава 1. ВВЕДЕНИЕ В КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ | 16 |
| 1.1. Множество комплексных чисел | 16 |
| 1.1.1. Операции с комплексными числами | 16 |
| 1.1.2. Поле комплексных чисел | 17 |
| 1.1.3. Алгебраическая форма записи | 18 |
| 1.1.4. Тригонометрическая форма записи | 19 |
| 1.2. Расширенная комплексная плоскость | 20 |
| 1.2.1. Топология комплексной плоскости | 20 |
| 1.2.2. Компактность | 23 |
| 1.2.3. Связность | 24 |
| 1.2.4. Стереографическая проекция | 24 |
| 1.2.5. Сферическая метрика | 26 |
| 1.3. Предел и непрерывность | 27 |
| 1.3.1. Функции комплексного переменного | 27 |
| 1.3.2. Непрерывность | 27 |
| 1.3.3. Равномерная непрерывность | 28 |
| 1.4. Кривые и области | 29 |
| 1.4.1. Кривые и контуры | 29 |
| 1.4.2. Области | 35 |
| 1.4.3. Многосвязные области | 36 |
| Глава 2. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ | 37 |
| 2.1. Комплексное дифференцирование | 37 |
| 2.1.1. Производная и дифференцируемость | 37 |

| | | |
|-----------------|---|-----------|
| 2.1.2. | Правила дифференцирования | 38 |
| 2.1.3. | Условия Коши – Римана | 39 |
| 2.2. | Аналитические функции и конформные отображения | 41 |
| 2.2.1. | Геометрический смысл аргумента производной | 41 |
| 2.2.2. | Геометрический смысл модуля производной | 42 |
| 2.2.3. | Понятие аналитической функции | 42 |
| 2.3. | Дробно-линейные отображения | 43 |
| 2.3.1. | Простейшие свойства | 43 |
| 2.3.2. | Групповое свойство | 45 |
| 2.3.3. | Круговое свойство | 45 |
| 2.3.4. | Свойство симметрии | 47 |
| 2.3.5. | Свойство трех точек | 49 |
| 2.3.6. | Примеры дробно-линейных отображений | 51 |
| 2.3.7. | Функция Жуковского | 53 |
| 2.4. | Элементарные аналитические функции | 55 |
| 2.4.1. | Экспоненциальная функция | 55 |
| 2.4.2. | Тригонометрические и гиперболические функции | 56 |
| 2.4.3. | Логарифмическая функция | 59 |
| 2.4.4. | Степенная функция | 61 |
| 2.4.5. | Обратные функции к тригонометрическим и гиперболическим | 62 |
| Глава 3. | ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМА И ФОРМУЛА КОШИ | 64 |
| 3.1. | Криволинейные интегралы | 64 |
| 3.1.1. | Комплексные криволинейные интегралы | 64 |
| 3.1.2. | Свойства криволинейных интегралов | 66 |
| 3.2. | Интегральная теорема Коши | 69 |
| 3.2.1. | Интегральная теорема | 69 |
| 3.2.2. | Обобщение интегральной теоремы Коши | 71 |
| 3.2.3. | Случай многосвязной области | 74 |
| 3.2.4. | Первообразная аналитической функции | 75 |
| 3.3. | Интегральная формула Коши | 78 |
| 3.3.1. | Интегральная формула | 78 |
| 3.3.2. | Формула среднего значения и принцип максимума | 80 |
| 3.3.3. | Формула Шварца | 83 |
| 3.3.4. | Интеграл типа Коши | 84 |
| 3.3.5. | Теорема Мореры | 87 |
| 3.3.6. | Сопряженные гармонические функции | 88 |

| | |
|--|-----|
| Глава 4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ | 90 |
| 4.1. Ряды Тейлора | 90 |
| 4.1.1. Основные понятия теории рядов | 90 |
| 4.1.2. Степенные ряды | 92 |
| 4.1.3. Радиус сходимости и формула Коши — Адамара | 93 |
| 4.1.4. Разложение в степенной ряд | 95 |
| 4.1.5. Эквивалентные описания аналитичности | 96 |
| 4.2. Теоремы единственности | 97 |
| 4.2.1. Локальная форма единственности | 97 |
| 4.2.2. Теорема единственности Вейерштрасса | 98 |
| 4.3. Последовательности аналитических функций | 99 |
| 4.3.1. Сходимость внутри области | 99 |
| 4.3.2. Принцип счетной компактности | 99 |
| 4.3.3. Теорема Витали | 101 |
| 4.3.4. Теорема Вейерштрасса | 102 |
| Глава 5. Ряды ЛОРАНА | 104 |
| 5.1. Разложение в ряд Лорана | 104 |
| 5.1.1. Ряд Лорана | 104 |
| 5.1.2. Формулы для коэффициентов разложения | 105 |
| 5.1.3. Неравенства Коши | 108 |
| 5.2. Классификация изолированных особых точек | 108 |
| 5.2.1. Правильные точки функции | 108 |
| 5.2.2. Полюсы | 110 |
| 5.2.3. Существенно особые точки | 112 |
| 5.2.4. Случай бесконечно удаленной точки | 113 |
| 5.2.5. Теорема Сохоцкого | 114 |
| 5.2.6. Целые и мероморфные функции | 115 |
| Глава 6. ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ | 117 |
| 6.1. Вычеты и основная теорема о вычетах | 117 |
| 6.1.1. Вычеты | 117 |
| 6.1.2. Формулы для вычисления вычетов | 118 |
| 6.1.3. Теорема Коши о вычетах | 119 |
| 6.1.4. Вычет в бесконечно удаленной точке | 120 |
| 6.1.5. Теорема о полной сумме вычетов | 122 |

| | |
|--|------------|
| 6.2. Вычисление интегралов с помощью вычетов | 122 |
| 6.2.1. Несобственные интегралы | 122 |
| 6.2.2. Интегралы от произведений $f(x)e^{i\alpha x}$ | 124 |
| 6.2.3. Интегралы от тригонометрических функций | 126 |
| 6.3. Теорема о логарифмическом вычете и ее приложения 127 | |
| 6.3.1. Логарифмический вычет | 127 |
| 6.3.2. Принцип аргумента | 129 |
| 6.3.3. Теорема Руше | 132 |
| 6.3.4. Принцип сохранения области | 133 |
| Глава 7. Дополнительные главы комплексного анализа 135 | |
| 7.1. Аналитическое продолжение | 135 |
| 7.1.1. Элемент аналитической функции и его продолжение | 135 |
| 7.1.2. Принцип симметрии Римана – Шварца | 140 |
| 7.2. Однолистные функции | 143 |
| 7.2.1. Теорема о числе прообразов | 143 |
| 7.2.2. Критерий локальной однолистности | 144 |
| 7.2.3. Особые точки однолистных функций | 147 |
| 7.2.4. Последовательности однолистных функций | 148 |
| 7.3. Конформное отображение областей | 148 |
| 7.3.1. Автоморфизмы основных областей | 148 |
| 7.3.2. Теорема Римана | 150 |
| 7.4. Конформные отображения многоугольников | 153 |
| 7.4.1. Эллиптические интегралы первого рода | 153 |
| 7.4.2. Эллиптический синус | 157 |
| 7.4.3. Формула Кристоффеля – Шварца | 158 |

Часть II. ПРАКТИКА

| | |
|---|------------|
| Глава 1. Комплексные числа и действия над ними | 162 |
| 1.1. Задания для аудиторной работы | 162 |
| 1.2. Базовые индивидуальные задания | 169 |
| 1.3. Задания для самостоятельной работы | 172 |
| 1.4. Задания творческого характера | 174 |

| | |
|---|-----|
| Глава 2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ . . . | 176 |
| 2.1. Задания для аудиторной работы | 176 |
| 2.2. Базовые индивидуальные задания | 180 |
| 2.3. Задания для самостоятельной работы | 183 |
| 2.4. Задания творческого характера | 184 |
| Глава 3. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО | 187 |
| 3.1. Задания для аудиторной работы | 187 |
| 3.2. Базовые индивидуальные задания | 194 |
| 3.3. Задания для самостоятельной работы | 198 |
| 3.4. Задания творческого характера | 200 |
| Глава 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ МОДУЛЯ И АРГУМЕНТА ПРОИЗВОДНОЙ | 203 |
| 4.1. Задания для аудиторной работы | 203 |
| 4.2. Базовые индивидуальные задания | 205 |
| 4.3. Задания для самостоятельной работы | 208 |
| 4.4. Задания творческого характера | 209 |
| Глава 5. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ | 211 |
| 5.1. Задания для аудиторной работы | 211 |
| 5.2. Базовые индивидуальные задания | 216 |
| 5.3. Задания для самостоятельной работы | 222 |
| 5.4. Задания творческого характера | 224 |
| Глава 6. ДРВНО-ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ | 225 |
| 6.1. Задания для аудиторной работы | 225 |
| 6.2. Базовые индивидуальные задания | 229 |
| 6.3. Задания для самостоятельной работы | 237 |
| 6.4. Задания творческого характера | 239 |

| | |
|---|-----|
| Глава 7. Функция Жуковского | 243 |
| 7.1. Задания для аудиторной работы | 243 |
| 7.2. Базовые индивидуальные задания | 247 |
| 7.3. Задания для самостоятельной работы | 249 |
| 7.4. Задания творческого характера | 250 |
| Глава 8. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМА и ФОРМУЛА КОШИ | 253 |
| 8.1. Задания для аудиторной работы | 253 |
| 8.2. Базовые индивидуальные задания | 263 |
| 8.3. Задания для самостоятельной работы | 269 |
| 8.4. Задания творческого характера | 277 |
| Глава 9. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ | 279 |
| 9.1. Задания для аудиторной работы | 279 |
| 9.2. Базовые индивидуальные задания | 282 |
| 9.3. Задания для самостоятельной работы | 287 |
| 9.4. Задания творческого характера | 289 |
| Глава 10. РЯДЫ ТЕЙЛОРА | 291 |
| 10.1. Задания для аудиторной работы | 291 |
| 10.2. Базовые индивидуальные задания | 294 |
| 10.3. Задания для самостоятельной работы | 298 |
| 10.4. Задания творческого характера | 300 |
| Глава 11. НУЛИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ | 303 |
| 11.1. Задания для аудиторной работы | 303 |
| 11.2. Базовые индивидуальные задания | 306 |
| 11.3. Задания для самостоятельной работы | 309 |
| 11.4. Задания творческого характера | 311 |

| | |
|---|-----|
| Глава 12.Ряд ЛОРАНА | 313 |
| 12.1.Задания для аудиторной работы | 313 |
| 12.2.Базовые индивидуальные задания | 319 |
| 12.3.Задания для самостоятельной работы | 324 |
| 12.4.Задания творческого характера | 327 |
| Глава 13.ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ | 329 |
| 13.1.Задания для аудиторной работы | 329 |
| 13.2.Базовые индивидуальные задания | 331 |
| 13.3.Задания для самостоятельной работы | 335 |
| 13.4.Задания творческого характера | 337 |
| Глава 14.ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЫЧЕТОВ | 341 |
| 14.1.Задания для аудиторной работы | 341 |
| 14.2.Базовые индивидуальные задания | 346 |
| 14.3.Задания для самостоятельной работы | 350 |
| 14.4.Задания творческого характера | 352 |
| Глава 15.ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ВЫЧЕТОВ | 355 |
| 15.1.Задания для аудиторной работы | 355 |
| 15.2.Базовые индивидуальные задания | 361 |
| 15.3.Задания для самостоятельной работы | 368 |
| 15.4.Задания творческого характера | 371 |
| Глава 16.ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ И НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ | 373 |
| 16.1.Задания для аудиторной работы | 373 |
| 16.2.Базовые индивидуальные задания | 377 |
| 16.3.Задания для самостоятельной работы | 379 |
| 16.4.Задания творческого характера | 380 |

| | |
|--|-----|
| Глава 17. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЫЧЕТОВ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ И ЛАПЛАСА | 383 |
| 17.1. Задания для аудиторной работы | 383 |
| 17.2. Базовые индивидуальные задания | 386 |
| 17.3. Задания для самостоятельной работы | 388 |
| 17.4. Задания творческого характера | 391 |
| Глава 18. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ВЫЧЕТ, ПРИНЦИП АРГУМЕНТА | 392 |
| 18.1. Задания для аудиторной работы | 392 |
| 18.2. Базовые индивидуальные задания | 395 |
| 18.3. Задания для самостоятельной работы | 398 |
| 18.4. Задания творческого характера | 403 |
| Глава 19. ОТОБРАЖЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ. ИНТЕГРАЛ КРИСТОФФЕЛЯ – ШВАРЦА . . | 405 |
| 19.1. Задания для аудиторной работы | 405 |
| 19.2. Базовые индивидуальные задания | 411 |
| 19.3. Задания для самостоятельной работы | 417 |
| 19.4. Задания творческого характера | 418 |
| ОТВЕТЫ | 420 |
| РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА | 442 |
| ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ | 443 |
| СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ | 447 |

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория функций комплексного переменного является одной из основных математических дисциплин и входит в учебные планы для математических специальностей учреждений образования, обеспечивающих получение высшего образования. Для ряда специальностей ее содержание расширяется дисциплиной «Дополнительные главы теории функций».

Предлагаемый учебник посвящен изложению этих взаимосвязанных дисциплин в полном соответствии с действующими программами обучения для математических специальностей.

Материал книги делится на две части: «Теория» и «Практика». Теоретическая часть содержит следующие темы (главы):

1) «Введение в комплексный анализ»: рассматривается множество комплексных чисел, комплексная плоскость, предел и непрерывность функций комплексного переменного, кривые и области;

2) «Дифференцируемость»: вводятся и исследуются такие фундаментальные понятия, как комплексное дифференцирование, аналитические функции и конформные отображения, элементарные аналитические функции;

3) «Интегральные теорема и формула Коши»: вводится понятие комплексного интеграла, рассматривается интегральная теорема Коши и интегральная формула Коши;

4) «Последовательности и ряды»: исследуются ряды Тейлора, теоремы единственности, последовательности аналитических функций;

5) «Ряды Лорана»: дается представление о разложении в ряд Лорана и проводится классификация изолированных особых точек;

6) «Теория вычетов»: содержится материал по вычетам и основной теореме о вычетах, а также о логарифмическом вычете и его приложениях;

7) «Дополнительные главы комплексного анализа»: даются понятия об аналитическом продолжении, однолистных функциях, конформных отображениях областей.

Первые шесть глав содержат теоретический материал к дисциплине «Теория функций комплексного переменного», а последняя — к дисциплине «Дополнительные главы теории функций».

Все математические утверждения в теоретической части учебника строго доказаны. Исключение сделано только для нескольких теорем (теорема Жордана, теорема Пикара и теорема о монодромии), доказательства которых потребовали бы существенного увеличения объема.

Каждая глава состоит из параграфов, примерно соответствующих одной лекции. Параграфы разбиваются на подпараграфы, посвященные рассмотрению отдельных вопросов, минимальных по объему, но замкнутых по содержанию.

Кроме того, учебник снабжен предметным указателем и списком основных математических обозначений. В книге используется двойная нумерация формул и других объектов. Первое число обозначает номер главы, содержащей данный объект, второе — номер объекта внутри этой главы. В конце доказательств теорем и решений задач для удобства читателя ставится знак \square .

Содержание задачника соответствует теоретической части. В нем приведены задачи по следующим темам: комплексные числа и действия над ними, элементарные трансцендентные функции, дифференцируемость функции комплексного переменного, геометрический смысл модуля и аргумента производной, линейная функция, дробно-линейная функция, функция Жуковского, интегральная теорема и формула Коши, степенные ряды, ряды Тейлора, нули аналитической функции и теорема единственности, ряд Лорана, изолированные особые точки аналитической функции, вычисление вычетов, вычисление интегралов с помощью вычетов, вычисление собственных и несобственных интегралов, применение теории вычетов для вычисления преобразований Фурье и Лапласа, логарифмический вычет, а также отображение с помощью элементарных функций.

Каждая глава задачника содержит задания для аудиторной работы, базовые индивидуальные задания, задания для самостоятельной работы и задания творческого характера. Задания для аудиторной ра-

боты включают набор типовых примеров по рассматриваемой теме. Отдельные задачи сопровождаются подробным решением, что позволяет использовать книгу для самостоятельного изучения и на заочных отделениях. Базовые индивидуальные задания рекомендуется применять для домашней работы в качестве минимального уровня усвоения материала по изучаемой теме. Задания для самостоятельной работы содержат задачи более высокого уровня сложности, однако вполне по силам студентам-математикам. Степень использования этих заданий зависит от специальности студентов и подходов в организации учебного процесса преподавателем. Задания творческого характера имеют повышенный уровень сложности и предназначены для наиболее подготовленных студентов. Задачи для аудиторной и самостоятельной работы снабжены ответами, некоторая часть — решениями.

Последовательность глав в практическом материале не полностью соответствует изложению теоретического материала. В частности, элементарные трансцендентные функции на практике изучаются раньше, чем они рассмотрены в теории. Такой подход позволяет расширить перечень задач в последующих главах, в которых, безусловно, будет продолжено изучение свойств элементарных трансцендентных функций. Также отметим, что в некоторых источниках отображения с помощью элементарных функций (глава 19 практики) изучаются раньше, чем теория интегрирования. Авторы посчитали целесообразным отнести этот материал к дополнительным главам комплексного анализа, например, из-за использования интеграла Кристоффеля – Шварца.

В задачнике имеется довольно много отсылок к первой (теоретической) части книги. В таких случаях при оформлении ссылки на нумерованный объект теоретической части применяется буква «Т» (от слова «теория») в верхнем индексе. Например, фраза «см. п. 1.1.1^Т» означает ссылку на п. 1.1.1 первой (теоретической) части.

В список литературы авторы включили основные учебники по теории функций комплексного переменного на русском языке. Этот список дополнен книгой Н.В. Александровой «История математических терминов, понятий, обозначений: словарь-справочник», из которой можно узнать многое об истории формирования основных понятий комплексного анализа.

Учебник адресуется прежде всего преподавателям, читающим лекции и ведущим практические и лабораторные занятия по комплексному анализу, а также студентам-математикам, изучающим его. Оно может быть рекомендовано магистрантам, аспирантам и научным работникам, интересующимся теорией функций комплексного переменного и ее приложениями.

В теоретическую часть учебника включен новый раздел «Вычисление интегралов с помощью вычетов», что позволило более полно изложить главу «Теория вычетов». Существенно переработан и расширен материал для проведения практических занятий, в частности главы 1, 5, 9 и 15. Исправлены замеченные опечатки и неточности.

Авторы благодарят заведующего отделом нелинейного и стохастического анализа Института математики Национальной академии наук Беларуси, члена-корреспондента Национальной академии наук Беларуси, доктора физико-математических наук, профессора В.В. Гороховика, доктора физико-математических наук, профессора кафедры теории функций Белорусского государственного университета Э.И. Зверовича, кандидата физико-математических наук, доцента кафедры высшей математики и математической физики Белорусского государственного университета А.П. Шилина, кандидата физико-математических наук, доцента кафедры теории функций Белорусского государственного университета Т.С. Мардвилко; кафедру математики и методики преподавания математики физико-математического факультета Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка, в особенности, кандидатов физико-математических наук, доцентов Н.В. Гриба и И.Н. Гуло за множество полезных замечаний по теоретической части книги, которые существенно улучшили изложение материала.

Авторы

Часть I

ТЕОРИЯ

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ В КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

1.1. Множество комплексных чисел

1.1.1. Операции с комплексными числами

Всюду ниже множество всех действительных чисел обозначается общепринятым символом \mathbb{R} .

Определение 1.1. *Множество всех комплексных чисел (комплексная плоскость) \mathbb{C} определяется как множество*

$$\mathbb{C} := \{z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

всех упорядоченных пар действительных чисел, на котором определены отношение равенства и две операции — сложения и умножения.

Равенство. Две пары $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ и $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ называются равными, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Сложение. Суммой элементов $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ и $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ называется

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Умножение. Произведением элементов $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ и $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ называется

$$z_1 \cdot z_2 := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$