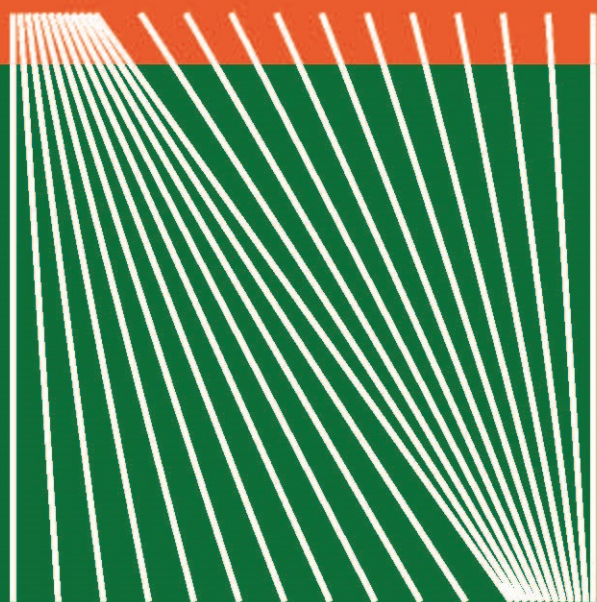


О. И. Баран

ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ



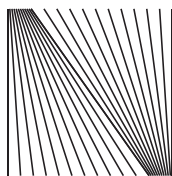
5–7 классы

О. И. Баран

ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

5–7 классы

Пособие
для учащихся учреждений
общего среднего образования



Минск
«Адукацыя і выхаванне»
2026

УДК 51(075.3)
ББК 22.1я721
Б24

Рецензенты: доктор физико-математических наук профессор кафедры высшей математики ФПМИ Белорусского государственного университета, обладатель нагрудного знака «Выдатнік адукацыі» Министерства образования Республики Беларусь *С. А. Мазаник*; заведующий кафедрой математики и методики преподавания математики ГУО «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка» кандидат физико-математических наук, доцент *Н. В. Гриб*

Баран, О. И.

Б24 Олимпиадные задачи по математике. 5–7 классы : пособие для учащихся учреждений общего среднего образования / О. И. Баран. – Минск : Адукацыя і выхаванне, 2026. – 400 с. : ил.

ISBN 978-985-34-0551-4.

Представлены задачи по математике повышенной сложности для учащихся 5–7 классов. При этом особое внимание при выборе задач уделялось их содержательной привлекательности, а также нестандартным приёмам и методам их решения. Для удобства использования пособия задачи сгруппированы по разделам и расположены в порядке возрастания сложности. Для всех задач даны решения и ответы, в некоторых из них приведены авторские указания, схемы, рисунки и графики, которые способствуют продуктивному усвоению материала.

Адресовано учащимся учреждений общего среднего образования, учителям математики и руководителям математических кружков.

УДК 51(075.3)
ББК 22.1я721

Учебное издание

Баран Олег Иванович

ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ 5–7 КЛАССЫ

Пособие

Редактор *Т. В. Кульнис*. Художественный редактор *А. Н. Ильичева*. Компьютерная вёрстка *Н. В. Шабуни*. Корректор *Т. В. Кульнис*.

Подписано в печать 28.05.2026. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 25,00. Уч.-изд. л. 15,00. Тираж 500 экз. Заказ 922.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Адукацыя і выхаванне”».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/19 от 02.08.2013.

Ул. Будённого, 21, 220070, г. Минск.

Производственное дочернее унитарное предприятие «Типография Федерации профсоюзов Беларуси». Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 2/18 от 26.11.2013.

Пл. Свободы, 23-94, 220030, г. Минск.

ISBN 978-985-34-0551-4

© Баран О. И., 2026

© Оформление. Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Адукацыя і выхаванне”», 2026

СТУПЕНЬКИ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ОЛИМП

Если вы хотите научиться плавать, то смело ступайте в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их!

Д. Пойа

Первые Олимпиады проводились ещё в Древней Греции как соревнования в ловкости, силе, красоте. По одной из легенд Олимпийские игры в Древней Греции основал сам Геракл. С 776 г. до н. э. эти игры были возобновлены и проходили в начале июня каждого четвёртого года.

Легенды рассказывают, что прославленный древнегреческий философ и математик Пифагор уделял большое внимание гигиене и здоровью, и также участвовал в кулачном бою на 58-й Олимпиаде, которая проходила в 548 г. до н. э. Из-за малого роста Пифагора судьи не хотели допускать его к соревнованиям, но учёный добился своего, даже стал чемпионом в данном виде спорта и удерживал этот титул ещё на нескольких последующих Олимпиадах. Когда друзья Пифагора недоумевали по поводу его спортивных увлечений, он отвечал, что если не делать перерыв в научных занятиях, то ценные мысли не придут в утомлённую голову. И хотя это только легенда, пусть и красивая, но она льстит математикам.

Известно также, что и Эратосфен не только занимался точными науками, но и являлся выдающимся поэтом, оратором, участвовал в Олимпийских играх и, вероятно, был победителем в пятиборье. На Олимпийских играх читал свой труд «отец истории» Геродот...

В IV в. до н. э. историк Тимей даже ввёл летоисчисление по Олимпиадам. А первые Олимпийские игры современности прошли в Афинах в 1896 г.

Однако разного рода соревнования проводились не только в спорте. Хорошо известна любовь к состязаниям в решении задач во многих странах мира. Математические соревнования по решению задач аналогично спортивным соревнованиям также называют олимпиадами.

В России конкурсы по решению задач начали проводиться с 1886 г., в Венгрии и Румынии – с 1894 г., в других странах – значительно позже.

Особое развитие олимпийские математические соревнования приобрели в СССР. Первую такую олимпиаду организовали учёные Ленинграда ещё в 1934 г. для учащихся старших классов ленинградских школ. А уже в следующем году на математических соревнованиях встречались школьники в Москве, Ленинграде и Киеве.

В 1960 г. в СССР была проведена экспериментальная олимпиада, а с 1961 г. олимпиады в масштабе всей страны стали организовываться регулярно. С 1967 г. такие соревнования начали называть Всесоюзными математическими олимпиадами. С этого времени в данных соревнованиях неизменно участвовали и школьники Беларуси.

Международные математические олимпиады (ММО) ведут свое начало с 1959 г., когда в Румынии была проведена первая ММО. В первых олимпиадах участвовали школьники лишь европейских социалистических стран, а с 1974 г. – и многих других. С тех пор команды юных математиков Советского Союза (а теперь и Беларуси) неизменно и успешно выступают в этих соревнованиях. С 1959 по 2021 г. в ММО было зарегистрировано 136 стран.

Проведению ММО предшествуют национальные олимпиады в каждой стране. Для участия в ММО команда Советского Союза формировалась из победителей заключительного тура всесоюзной олимпиады.

В составе команды Советского Союза в ММО были и школьники из Беларуси. Они не только принимали участие, но и побеждали. На их счету есть медали и дипломы всех трёх степеней.

Белорусская сборная на 63-й (2022) и 64-й (2023) ММО в Норвегии и в Японии завоевала четыре серебряные и три бронзовые медали.

Каждую страну представляет команда, состоящая не более чем из шести участников, руководителя и научного руководителя. Официально ММО – личное первенство. Участники должны быть не старше 20 лет и учиться на получение аттестата зрелости или его эквивалента. Языки ММО – английский, французский, немецкий, русский и испанский. Участникам предлагается решить шесть задач (по три задачи в день в течение двух дней подряд), каждая из которых оценивается в 7 баллов, так что возможный максимум – 42 балла. Первая и четвёртая задачи классифицируются как лёгкие, вторая и пятая – как средние, третья и шестая – как тяжёлые. Например, на ММО 2007 г. третью и шестую задачи решили по пять человек из нескольких сотен лучших в своих странах молодых математиков.

Усилиями многих энтузиастов (среди которых немало опытных учителей, известных учёных, аспирантов, студентов) белорусские математические олимпиады способствовали поиску и творческому развитию одарённых школьников в республике. Многие белорусские школьники в разные годы были победителями республиканских и международных соревнований,

в дальнейшем стали выдающимися учёными-математиками.

Учащимся также далеко не безразлично, какие именно задачи и упражнения рекомендуются им для решения. Они получают больше удовольствия в процессе обучения, если им удаётся решить задачу, которая предлагалась на математических соревнованиях, олимпиадах или на вступительных экзаменах в высшие учебные заведения. Поэтому задания прошлых математических олимпиад можно рассматривать как эффективный дидактический материал, в процессе решения которого учащиеся имеют больше возможностей быстрее усвоить основные методы и алгоритмы, почувствовать уверенность в своих возможностях. При этом также приходит понимание интересной задачи, а успешное её решение рождает положительные эмоции.

Задачи математических олимпиад обычно готовят авторитетные специалисты-математики. За прошедшие десятилетия образовался значительный банк данных задач. Именно такие задачи, с решениями и ответами, составляют содержание этого пособия. Большинство задач относится к нестандартным, среди которых есть авторские или созданные на основе известных типов олимпиадных задач. Следует также учитывать, что решения задач изложены максимально компактно, поэтому их разбор желательно проводить в письменном виде. Многие задачи допускают другие методы и способы решений. Будет хорошо, если читатель сможет найти эти решения, при этом получив особенное удовольствие, если такие решения будут проще и рациональнее, чем приведённые в пособии.

Необходимо также отметить, что предлагаемые вашему вниманию задачи относятся к промежуточному

уровню сложности, т. е. рассчитаны на подавляющее большинство учащихся учреждений общего среднего образования, которые интересуются математикой и самостоятельно трудятся над повышением своего уровня знаний в этой области. Думаю, что они будут интересны также и учителям математики таких учебных заведений.

Любая решённая задача – это ступенька на пути к математическому Олимпу, и этот путь каждый проходит сам. А как далеко и высоко вы пройдёте по этой дороге, зависит только от вас.

Желаю вам успехов на этом замечательном пути!

Доктор физико-математических наук
профессор кафедры высшей математики
ФПМИ БГУ, обладатель нагрудного знака
«Выдатнік адукацыі» Министерства обра-
зования Республики Беларусь

С. А. Мазаник

5

ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

класс

Разве ты не заметил, что способный к математике, изощрён во всех науках о природе?

Платон

Целые числа, дроби и уравнения

Задача решена – ура!
Землекопа – полтора!

*Из мультфильма
«В стране невыученных уроков»*

1. В данном выражении вместо звёздочек вставьте один или больше знаков арифметических операций и скобки (лишние звёздочки разрешается стереть) так, чтобы выполнялось равенство:

$$*1*2*3*4*5*6*7*8*9* = 2023.$$

Решение. Возможные варианты решения:

$$1 + 2 \cdot 3 \cdot (456 - 7 \cdot (8 + 9)) = 2023;$$

$$1 + 2 \cdot 3 \cdot ((4 + 5 \cdot 6 + 7) \cdot 8 + 9) = 2023;$$

$$(-1 + 2) \cdot 3 + 4 \cdot (-5 + 6 + 7 \cdot 8 \cdot 9) = 2023;$$

$$(1 - 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot 7 \cdot (8 + 9) = 2023;$$

$$-1 : 2 \cdot 34 \cdot (5 - 6) \cdot 7 \cdot (8 + 9) = 2023;$$

$$-1234 \cdot (5 - 6) + 789 = 2023.$$

2. Дано выражение: $1*2*3*4*5*6*7*8*9 = 2023$. Не меняя порядка цифр, вместо звёздочек разрешается поставить знаки арифметических операций так, чтобы выражение стало верным. Ненужные звёздочки и цифры можно удалить.

Решение. Возможный вариант решения:

$$1234 + 789 = 2023.$$

3. Напишите пять нечётных цифр, которые в сумме составляют 14. Помните, что эта задача с подвохом!

Решение. В условии сказано пять цифр, а не чисел!
 $11 + 1 + 1 + 1 = 14$.

4. Применяя пять нечётных цифр, получите в результате сложения 20. При этом использовать одну и ту же цифру можно несколько раз.

Решение. $13 + 3 + 3 + 1 = 20$. Заметьте, что число 13 составлено из двух нечётных цифр (1 и 3).

5. Используя все цифры (кроме нуля) по одному разу, напишите как можно больше квадратов чисел.

Ответ. Их всего пять: 1, 9, 25, 36, 784.

6. Используя все цифры (кроме нуля) по одному разу, напишите как можно больше простых чисел.

Ответ. Их всего шесть: 2, 3, 5, 47, 61, 89.

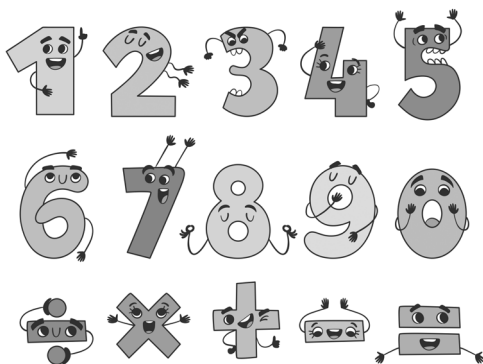
7. Используя все цифры (кроме нуля) по одному разу, напишите два числа, из которых одно вдвое больше другого.

Решение. Очевидно, что при этом большее число будет пятизначным, а меньшее – четырёхзначным.

Ответ. Возможные варианты: 18 654 и 9327; 18 546 и 9273; 18 534 и 9267; 15 864 и 7932; 15 846 и 7923; 14 658 и 7329; 14 586 и 7293; 13 854 и 6927; 13 584 и 6792; 13 458 и 6729.

8. Используя все цифры (кроме нуля) по одному разу, напишите два числа, из которых одно втрое больше другого.

Ответ. 17 496 и 5832; 17 469 и 5823.



9. Расставьте скобки и математические знаки так, чтобы равенство стало верным: $9999999 = 100$.

Решение. Возможные варианты решения:

$$(99 - 9) : 9 + (99 - 9) = 100;$$

$$999/9 - 99 : 9 = 100;$$

$$(99 - 99) \cdot 999 = 10 \cdot 0.$$

10. Расставьте знак «+» между некоторыми цифрами числа 987 654 321 так, чтобы в сумме получилось число 99.

Решение. Возможные варианты решения:

$$9 + 8 + 7 + 65 + 4 + 3 + 2 + 1 = 99;$$

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 43 + 21 = 99.$$

11. Используя все цифры (кроме нуля) по одному разу, напишите три числа, из которых второе вдвое больше первого, а третье втрое больше первого.

Ответ. 192, 384, 576; 219, 438, 657; 273, 546, 819; 327, 654, 981.

12. Существуют ли два последовательных натуральных числа такие, что сумма цифр каждого из них делится на 7?

Ответ. Да, например числа 69 999 и 70 000.

13. Сумма 2026 натуральных чисел – нечётное число. Каким будет произведение этих чисел: чётным или нечётным?

Решение. Если бы все слагаемые были нечётными, то их общая сумма была бы чётной, а по условию она нечётная, поэтому среди этих чисел обязательно есть и чётное число.

Ответ. Произведение данных чисел будет чётным.

14. Половина от половины числа равна половине. Какое это число?

Решение. Половина числа равна 1, а половина от половины этого числа (т. е. от 1) равна 0,5, т. е. тоже половине.

Ответ. 2.

15. Делимое в 6 раз больше делителя, а делитель в 6 раз больше частного. Чему равны делимое, делитель и частное?

Решение. Пусть делитель равен числу d . По условию задачи делимое в 6 раз больше делителя, следовательно, делимое равно $6d$. Частное в 6 раз меньше делителя, значит, частное равно $d/6$. Получаем такое равенство: $6d/d = d/6$. Следовательно, $d/6 = 6$, откуда получаем $d = 36$. Таким образом, делитель d равен 36, тогда делимое равно $6 \cdot 36 = 216$, а частное равно $36 : 6 = 6$.

Ответ. 216, 36 и 6.

16. Докажите, что среди любых трёх целых чисел можно найти два, сумма которых делится на 2.

Доказательство. Возможны четыре случая:

1) все числа чётные: чётное + чётное = чётное и делится на 2;

2) все числа нечётные: нечётное + нечётное = чётное и делится на 2;

3) два чётных числа и одно нечётное: чётное + чётное = чётное и делится на 2;

4) два нечётных числа и одно чётное: нечётное + нечётное = чётное и делится на 2.

17. Произведение четырёх последовательных чисел равно 7920. Найдите эти числа.

Указание. Достаточно учесть, что число 7920 делится на 9 и на 11.

Ответ. $7920 = 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11$.

18. Если полторы курицы несут полтора яйца за полтора дня, то сколько яиц снесут 6 куриц за 6 дней?

Решение. Получается, что 3 курицы снесут за 3 дня 6 яиц, значит 6 куриц снесут за 6 дней 24 яйца.

Ответ. 24 яйца.

19. С помощью восьми цифр 8 и знаков математических операций (сложения, вычитания, умножения, деления и, возможно, скобок) нужно получить выражение, значение которого равно 1000. Коля уверяет, что он смог решить задачу с помощью только семи восьмёрок. Мог ли он это сделать?

Решение. Возможные варианты решения:

$$8 + 8 + 8 + 88 + 888 = 1000;$$

$$(8 \cdot 8 \cdot 8 - 8) \cdot (8 + 8) : 8 - 8 = 1000;$$

$$(8888 - 888) : 8 = 1000;$$

$$(8 + (8 + 8) : 8)^{(8+8+8):8} = 1000.$$

Это задание можно выполнить и более «экономно», при помощи только семи восьмёрок:

$$(8 + 8) \cdot 8 \cdot 8 - (8 + 8 + 8) = 1000.$$

Ответ. Коля мог решить задачу и с помощью семи восьмёрок.

20. Попробуйте получить 1 000 000 000, умножая два целых числа, в каждом из которых не было бы ни одного нуля.

Решение. 1 000 000 000 можно рассматривать как результат произведения девяти двоек и девяти пятёрок: $512 \cdot 1953125 = 1\,000\,000\,000$.

21. Напишите наибольшее число, у которого каждая цифра, начиная с третьей, равна сумме двух предыдущих цифр.

Решение. Нужно, чтобы искомое число имело максимально много разрядов, поэтому первая цифра должна быть 1.

Ответ. 10 112 358.



22. Напишите наибольшее шестизначное число, у которого каждая цифра, начиная с третьей, равна произведению двух предыдущих цифр.

Ответ. 900 000.

23. Произведение нескольких последовательных нечётных чисел заканчивается цифрой 9. Найдите количество таких множителей.

Решение. Таких чисел много. Обращаем внимание на произведения последних цифр множителей. Например, $9 \cdot 11 = 99$; $29 \cdot 31 = 899$. Если сделать

проверку для последовательности первых нечётных чисел, то можно обнаружить следующие четыре последовательных нечётных числа, произведение которых оканчивается цифрой 9: $7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 = 9009$, и т. д.

Ответ. Два или четыре.

24. В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между ними знаки «+» и «-» так, чтобы значение полученного выражения равнялось нулю?

Решение. Поскольку в этом ряду нечётное количество нечётных чисел, то как бы ни расставляли знаки, значение выражения будет числом нечётным, а 0 – число чётное.

Ответ. Невозможно.

25. Сумма двух чисел равна 51. Если в большем числе зачеркнуть одну цифру, то получится меньшее число. Найдите эти числа.

Решение. Понятно, что одно из чисел двузначное и число его десятков равно 4.

Ответ. 47 и 4.

26. Существуют ли такие целые числа, чтобы, умножив разность этих чисел на их произведение, можно было получить число 20272027...2027? (Последовательность цифр 2027 записана несколько раз.)

Решение. Надо рассмотреть четыре возможных случая выбора чётных и нечётных чисел и показать, что во всех случаях таким способом будут получены только чётные числа.

Ответ. Не существуют.

27. Цифры некоторого пятизначного числа записали в обратном порядке. Затем эти два числа сложили. Докажите, что хотя бы одна цифра полученной суммы будет чётная.

СОДЕРЖАНИЕ

СТУПЕНЬКИ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ОЛИМП	3
---	---

ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ.

5 КЛАСС	8
Целые числа, дроби и уравнения	8
Время и календарь	23
Текстовые задачи	34
Задачи на движение	63
Комбинаторика	74
Инварианты	80
Логические задачи	83
Сложные ситуации и взвешивания	91
Принцип Дирихле	103
Числовые ребусы и головоломки	107
Математические игры	114
Геометрические задачи	118

ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ.

6 КЛАСС	133
Целые числа и дроби	133
Проценты	146
Время и календарь	155
Текстовые задачи	163
Задачи на движение	199
Логические задачи, инварианты, комбинаторика	215
Принцип Дирихле	226
Сложные ситуации и взвешивания	230
Математические игры	239
Геометрические задачи	243

ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ.

7 КЛАСС	260
Целые числа, дроби и уравнения	260
Проценты	283
Время и календарь	291
Текстовые задачи	299
Задачи на движение	329
Комбинаторика	344
Инварианты	350
Принцип Дирихле	354
Логические задачи и числовые ребусы	356
Сложные ситуации и взвешивания	363
Математические игры	370
Геометрические задачи	374

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА	398
---------------------------------	-----