

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия
для студентов учреждений высшего образования
по математическим специальностям

В ТРЕХ ЧАСТЯХ
ЧАСТЬ 3



Минск
«Адукацыя і выхаванне»
2025

УДК 517(075.8)
ББК 22.0.161я73
М 34

Авторы части: С. А. Бондарев, Е. В. Громак, В. Г. Кротов,
Т. С. Мардвилко, А. Д. Стриленко

Рецензенты: кафедра фундаментальной и прикладной математики Гродненского государственного университета имени Янки Купалы (кандидат физико-математических наук, доцент *В. Р. Мисюк*, заведующий кафедрой кандидат физико-математических наук *А. В. Кузьмич*); доктор физико-математических наук, профессор *А. П. Старовойтов*

Все права на данное издание защищены. Воспроизведение всей книги или любой ее части не может быть осуществлено без разрешения издательства.

ISBN 978-985-599-989-9 (ч. 3)
ISBN 978-985-06-3484-9

© Оформление. Республиканское
унитарное предприятие
«Издательство “Адукацыя і
выхаванне”», 2025

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу данного издания легли практические занятия по дисциплине «Математический анализ», которые авторы учебного пособия проводят для студентов механико-математического факультета Белорусского государственного университета. В книгу также включены необходимые теоретические сведения, которые представляют выдержки из курса лекций по математическому анализу одного из авторов [10].

Ранее были изданы первые две части этого учебного пособия [3, 4]. Предлагаемая читателю третья, заключительная, часть состоит из четырех глав: «Интегралы, зависящие от параметра», «Интеграл Римана в $\mathbb{R}^d$ », «Криволинейные интегралы», «Поверхностные интегралы и теория поля».

В каждой главе учебного пособия вы найдете подробно разобранные примеры решения типовых задач, задания для аудиторной и самостоятельной работы, краткие теоретические сведения по математическому анализу, необходимые для решения задач, а также задания повышенной сложности.

Стараясь придерживаться единой структуры как в рамках данного учебного пособия, так и с предыдущими частями, авторы вынуждены были учитывать специфику излагаемого материала. Темы, рассматриваемые в этой части учебного пособия, традиционно изучаются последними в курсе математического анализа на механико-математическом факультете Белорусского государственного университета и являются наиболее сложными для студентов. Поэтому авторы ставили перед собой задачу прежде всего помочь

студенту разобраться с основными методами, подходами и приемами, используемыми при решении типовых задач данных разделов, и не перегрузить излишним количеством задач повышенной сложности. В разделе 4.2 «Поверхностные интегралы второго рода» отсутствуют задачи повышенной сложности, так как задания, которые могли бы оказаться в этом разделе, как правило, гораздо проще решаются другими подходами, например с помощью формулы Гаусса — Остроградского, и соответственно попали в другие разделы.

Глава 2 «Интеграл Римана в $\mathbb{R}^d$ » начинается со знакомства с мерой Жордана. Поскольку рассматриваемый в этой главе интеграл Римана базируется на понятии измеримого по Жордану множества, авторы посчитали целесообразным привести необходимые теоретические сведения о мере и измеримости по Жордану, выделив их в отдельный раздел.

Авторы благодарят профессора А. П. Старовойтова и кафедру фундаментальной и прикладной математики Гродненского государственного университета имени Янки Купалы, прежде всего доцента этой кафедры В. Р. Мисюка, за рецензирование данного пособия, а также кандидата физико-математических наук Ю. В. Васильева за полезные замечания, улучшившие изложение материала.

Авторы будут признательны всем, кто укажет на возможные неточности в тексте и внесет предложения по его улучшению.

Пожелания, предложения и замечания просим направлять по электронному адресу: mardvilko@gmail.com.

Глава 1

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

1.1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

Функция вида

$$I(\alpha) = \int_X f(x, \alpha) dx, \quad (1.1)$$

где $X \subset \mathbb{R}$ — некоторый промежуток (ограниченный или нет), $\alpha \in Y$, $Y \subset \mathbb{R}$ — некоторое множество (множество параметров), называется **интегралом, зависящим от параметра** (или параметрическим интегралом).

В данном разделе рассматривается случай, когда $X = [a, b]$ и $Y = [c, d]$, при этом используется обозначение

$$K = [a, b] \times [c, d].$$

Если $f \in C(K)$, то функция $\alpha \mapsto I(\alpha)$ непрерывна на $[c, d]$, т. е. для любого $\alpha_0 \in [c, d]$ выполняется

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_a^b f(x, \alpha) dx = \int_a^b \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f(x, \alpha) dx. \quad (1.2)$$

Пусть функции $\varphi, \psi \in C[c, d]$, причем $\varphi(\alpha), \psi(\alpha) \in [a, b]$ для всех $\alpha \in [c, d]$. Тогда, если $f \in C(K)$, то функция

$$\alpha \mapsto I(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x, \alpha) dx \quad (1.3)$$

непрерывна на $[c, d]$.

Если функция $f \in C(K)$, то

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, \alpha) dx \right) d\alpha = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, \alpha) d\alpha \right) dx. \quad (1.4)$$

Отметим, что обе части равенства (1.4) определены, так как в силу вышеизложенного из условия $f \in C(K)$ вытекает, что оба внутренних интеграла в (1.4) являются непрерывными и поэтому интегрируемыми.

Пусть $f \in C(K)$ и для всех $(x, \alpha) \in K$ существует частная производная $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)$, причем $\frac{\partial f}{\partial \alpha} \in C(K)$. Тогда интеграл (1.1) имеет производную в каждой точке $\alpha \in [c, d]$ и

$$I'(\alpha) = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx \quad (1.5)$$

(формула Лейбница).

Если, кроме того, $\varphi, \psi \in C^1[c, d]$, причем $\varphi(\alpha), \psi(\alpha) \in [a, b]$ при всех $\alpha \in [c, d]$, то интеграл (1.3) имеет производную в каждой точке $\alpha \in [c, d]$ и

$$I'(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx + f(\psi(\alpha), \alpha)\psi'(\alpha) - f(\varphi(\alpha), \alpha)\varphi'(\alpha). \quad (1.6)$$

Решение типовых задач

1. Найти пределы:

$$1) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} (x + \cos \alpha x) e^{x \sin \alpha} dx; \quad 2) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1 + \alpha^2 + x^2}.$$

Решение. 1) Поскольку подынтегральная функция

$$f(x, \alpha) = (x + \cos \alpha x) e^{x \sin \alpha}$$

непрерывна в прямоугольнике $K = \{(x, \alpha) : -\pi \leq x \leq \pi, -1 \leq \alpha \leq 1\}$, то искомым предел по формуле (1.2) равен

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\lim_{\alpha \rightarrow 0} (x + \cos \alpha x) e^{x \sin \alpha} \right) dx = \int_{-\pi}^{\pi} (x + 1) dx = 2\pi.$$

Следовательно,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} (x + \cos \alpha x) e^{x \sin \alpha} dx = 2\pi.$$

2) Поскольку подынтегральная функция

$$f(x, \alpha) = \frac{1}{1 + \alpha^2 + x^2}$$

непрерывна для любых $x \in [\alpha, \alpha + 1]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, и функции $\varphi(\alpha) = \alpha$, $\psi(\alpha) = 1 + \alpha$ непрерывны для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, то, применяя предельный переход, получим

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1 + \alpha^2 + x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

2. Вычислить интеграл $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$, $0 < a \leq b$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x, \alpha) = x^\alpha$. Эта функция непрерывна в прямоугольнике $K = \{(x, \alpha) : 0 \leq x \leq 1, a \leq \alpha \leq b\}$, где $a > 0$. Применяя формулу (1.4), получим

$$\int_a^b \left(\int_0^1 x^\alpha dx \right) d\alpha = \int_0^1 \left(\int_a^b x^\alpha d\alpha \right) dx. \quad (1.7)$$

Поскольку $\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}$, то левая часть (1.7) равна

$$\int_a^b \frac{d\alpha}{\alpha+1} = \ln(\alpha+1) \Big|_a^b = \ln \frac{1+b}{1+a}.$$

Правая часть (1.7) равна I , так как

$$\int_0^1 \left(\int_a^b x^\alpha d\alpha \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^\alpha}{\ln x} \Big|_a^b \right) dx = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx.$$

Следовательно,

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \ln \frac{1+b}{1+a}.$$

3. Применяя дифференцирование по параметру α , вычислить интеграл

$$I(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin^2 x + \alpha^2 \cos^2 x) dx, \quad \alpha \neq 0.$$

Решение. Пусть $\alpha > 0$ и $\alpha \neq 1$. Поскольку функция

$$f(x, \alpha) = \ln(\sin^2 x + \alpha^2 \cos^2 x)$$

непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$ в прямоугольнике $K = \{(x, \alpha) : 0 \leq x \leq \pi/2, a \leq \alpha \leq b\}$, где $a > 0$, то, применяя формулу дифференцирования по параметру (1.5), получим

$$I'(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{2\alpha \cos^2 x}{\sin^2 x + \alpha^2 \cos^2 x} dx.$$

Используя подстановку $t = \operatorname{tg} x$, найдем

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= 2\alpha \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)(t^2+\alpha^2)} = \frac{2\alpha}{\alpha^2-1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+\alpha^2} \right) dt = \\ &= \frac{2\alpha}{\alpha^2-1} \left(\operatorname{arctg} t - \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{t}{\alpha} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\alpha+1}, \end{aligned}$$

откуда

$$I(\alpha) = \pi \ln(\alpha+1) + C.$$

Поскольку $I(\alpha)$ – функция, непрерывная при $\alpha > 0$, и $I(1) = 0$, то $C = -\pi \ln 2$. Следовательно, $I(\alpha) = \pi \ln \frac{\alpha+1}{2}$ при $\alpha > 0$. Учитывая, что $I(\alpha)$ – четная функция, получим $I(\alpha) = \pi \ln \frac{|\alpha|+1}{2}$, если $\alpha \neq 0$.

4. Найти $I'(\alpha)$, если:

$$1) I(\alpha) = \int_1^2 \frac{e^{\alpha x^2}}{x} dx; \quad 2) I(\alpha) = \int_{\cos \alpha}^{\sin \alpha} \operatorname{sh} \alpha x^2 dx.$$

Решение. 1) Поскольку подынтегральная функция $f(x, \alpha) = \frac{e^{\alpha x^2}}{x}$ и ее частная производная $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} = e^{\alpha x^2} x$ непрерывны для любых $x \in [1, 2]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то, применяя формулу дифференцирования по параметру (1.5), получим

$$I'(\alpha) = \int_1^2 e^{\alpha x^2} x dx = \frac{e^{\alpha x^2}}{2\alpha} \Big|_1^2 = \frac{e^{4\alpha} - e^{\alpha}}{2\alpha}.$$

2) Поскольку функции $f(x, \alpha) = \operatorname{sh} \alpha x^2$, $\varphi(\alpha) = \cos \alpha$, $\psi(\alpha) = \sin \alpha$ непрерывны, то, применяя формулу Лейбница (1.6), найдем

$$I'(\alpha) = \int_{\cos \alpha}^{\sin \alpha} x^2 \operatorname{ch} \alpha x^2 dx + \cos \alpha \operatorname{sh}(\alpha \sin^2 \alpha) + \sin \alpha \operatorname{sh}(\alpha \cos^2 \alpha).$$

Задания для аудиторной работы

5. Доказать, что функция $I(\alpha)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, если:

$$1) I(\alpha) = \int_0^1 \sin^2 \alpha x^2 dx; \quad 2) I(\alpha) = \int_{-1}^2 \frac{x^2}{1+x^2+\alpha^2 x^4} dx.$$

6. Найти пределы:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{\alpha \rightarrow 1} \int_2^4 \frac{x}{1+x^2+\alpha^6} dx; & \quad 3) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^\pi x \cos(1+\alpha)x dx; \\ 2) \lim_{\alpha \rightarrow 1} \int_0^1 x^2 e^{\alpha x^3} dx; & \quad 4) \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^\alpha x}{1+x^2} dx. \end{aligned}$$

7. Выяснить, справедливо ли равенство

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^1 f(x, \alpha) dx = \int_0^1 \lim_{\alpha \rightarrow 0} f(x, \alpha) dx,$$

если:

$$1) f(x, \alpha) = \frac{x^3}{\alpha^2} e^{-\frac{x^2}{\alpha}}; \quad 2) f(x, \alpha) = x^2 \sqrt{\alpha^2 + x^2}.$$

8. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \sin \left(\ln \frac{1}{x} \right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

9. Найти $I'(\alpha)$, если:

$$\begin{aligned} 1) I(\alpha) &= \int_0^1 \sin \alpha x dx; & 4) I(\alpha) &= \int_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} e^{\alpha \sqrt{1-x^2}} dx; \\ 2) I(\alpha) &= \int_1^2 \frac{e^{\alpha x^2}}{x} dx; & 5) I(\alpha) &= \int_{\cos \alpha}^{\sin \alpha} e^{\alpha^4 x^2} dx; \\ 3) I(\alpha) &= \int_0^\alpha \frac{\ln(1+\alpha x)}{x} dx; & 6) I(\alpha) &= \int_{\alpha e^{-\alpha}}^{\alpha e^\alpha} \ln(1+\alpha^2 x^2) dx. \end{aligned}$$

10. Применяя дифференцирование по параметру α , вычислить интеграл $I(\alpha)$, если:

$$1) I(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \ln(\alpha^2 - \sin^2 x) dx, \quad \alpha > 1;$$

$$2) I(\alpha) = \int_0^{\pi} \ln \frac{1 + \alpha \cos x}{1 - \alpha \cos x} \frac{dx}{\cos x}, \quad |\alpha| < 1.$$

Задания для самостоятельной работы

11. Исследовать на непрерывность функцию $I(\alpha)$ на $\mathbb{R}$, если:

$$1) I(\alpha) = \int_0^1 (1+x)^{\alpha x} dx;$$

$$2) I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\alpha e^x}{x^2 + \alpha^2} dx.$$

12. Найти пределы:

$$1) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^1 \sqrt{1 + \alpha^2 x^4} dx;$$

$$3) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + \alpha^2} dx;$$

$$2) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^2 x^2 \cos \alpha x dx;$$

$$4) \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + (1 + \frac{x}{\alpha})^\alpha}.$$

13. Выяснить, справедливо ли равенство

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^1 f(x, \alpha) dx = \int_0^1 \lim_{\alpha \rightarrow 0} f(x, \alpha) dx,$$

если:

$$1) f(x, \alpha) = \frac{x}{\alpha^2} e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}};$$

$$2) f(x, \alpha) = \frac{2x\alpha^2}{(\alpha^2 + x^2)^2}.$$

14. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \cos \left(\ln \frac{1}{x} \right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \quad a > 0, b > 0.$$

15. Найти $I'(\alpha)$, если:

$$1) I(\alpha) = \int_1^3 \frac{\cos(\alpha x^3)}{x} dx;$$

$$4) I(\alpha) = \int_{3\alpha}^{\alpha^2} e^{\alpha x^2} dx;$$

$$2) I(\alpha) = \int_2^3 \frac{\operatorname{ch}(\alpha^4 x^2)}{x} dx;$$

$$5) I(\alpha) = \int_{e^{-\alpha}}^{e^{\alpha}} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2)}{x} dx;$$

$$3) I(\alpha) = \int_{\alpha}^{2\alpha} \frac{\sin \alpha x}{x} dx;$$

$$6) I(\alpha) = \int_{\operatorname{ch} \alpha}^{\operatorname{sh} \alpha} \ln(1 + \alpha^2 + x^2) dx.$$

16. Применяя дифференцирование по параметру α , вычислить интеграл $I(\alpha)$, если:

$$1) I(\alpha) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx, \quad |\alpha| < 1;$$

$$2) I(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx.$$

Задания повышенной сложности

17. Доказать, что интеграл $F(\alpha) = \int_0^1 f(x, \alpha) dx$ от разрывной функции $f(x, \alpha) = \operatorname{sign}(x - \alpha)$ является непрерывной на $\mathbb{R}$ функцией. Построить график функции $F(\alpha)$.

18. Выяснить, можно ли вычислить по правилу Лейбница производную функции $F(\alpha) = \int_0^1 \ln \sqrt{x^2 + \alpha^2} dx$ при $\alpha = 0$.

19. Найти $F''(\alpha)$, если $F(\alpha) = \int_0^{\alpha} (\alpha + x)f(x) dx$, где $f(x)$ — дифференцируемая функция.

20. Найти $F''(\alpha)$, если $F(\alpha) = \int_a^b f(x)|\alpha - x| dx$, где $a < b$ и $f(x)$ – непрерывная на $[a, b]$ функция.

21. Пусть

$$I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\varphi(x)}{\sqrt{\alpha - x}} dx,$$

где функция $\varphi(x)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(x)$ на отрезке $[0, a]$. Доказать, что при $\alpha \in (0, a)$ имеем

$$I'(\alpha) = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}} + \int_0^\alpha \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha - x}} dx.$$

1.2. Равномерная сходимость НИЗОП

Пусть $E \subset \mathbb{R}$ — некоторое множество и задана функция $f : [a, \infty) \times E \rightarrow \mathbb{R}$. При этом будем предполагать, что для любого $\alpha \in E$ существует несобственный интеграл

$$I(\alpha) = \int_a^{\infty} f(x, \alpha) dx. \quad (1.8)$$

Это требование включает интегрируемость f на любом отрезке $[a, b]$, $b > a$, при любом $\alpha \in E$.

Интеграл (1.8) будем называть **несобственным интегралом, зависящим от параметра $\alpha \in E$ (НИЗОП)**.

Несобственный интеграл, зависящий от параметра, (1.8) **сходится равномерно** относительно $\alpha \in E$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > a$, что для всех $\alpha \in E$ и всех $\xi \geq \delta$ выполняется неравенство

$$\left| \int_{\xi}^{\infty} f(x, \alpha) dx \right| < \varepsilon. \quad (1.9)$$

Следовательно, НИЗОП (1.8) сходится неравномерно, если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta > a$ найдутся числа $\alpha \in E$ и $\xi \geq \delta$ такие, что

$$\left| \int_{\xi}^{\infty} f(x, \alpha) dx \right| \geq \varepsilon. \quad (1.10)$$

Несобственный интеграл, зависящий от параметра, (1.8) сходится равномерно тогда и только тогда, когда (**общий критерий**)

$$\sup_{\alpha \in E} \int_{\xi}^{\infty} f(x, \alpha) dx \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow \infty. \quad (1.11)$$

Пусть

$$F(x) = \sup_{\alpha \in E} |f(x, \alpha)|, \quad x \geq a,$$

и сходится несобственный интеграл $\int_a^{\infty} F(x) dx$. Тогда несобственный интеграл, зависящий от параметра, (1.8) сходится равномерно относительно $\alpha \in E$ (**признак Вейерштрасса**).

В следующих двух признаках подынтегральная функция представлена в виде произведения и речь будет идти о равномерной сходимости интеграла

$$\int_a^{\infty} f(x, \alpha) g(x, \alpha) dx. \quad (1.12)$$

Интеграл, зависящий от параметра, (1.12) сходится равномерно относительно $\alpha \in E$, если (**признак Дирихле**):

- 1) функция f монотонно убывает по x при каждом фиксированном $\alpha \in E$ и сходится к нулю при $x \rightarrow +\infty$ равномерно относительно $\alpha \in E$;
- 2) функция

$$G(t, \alpha) = \int_a^t g(x, \alpha) dx$$

ограничена на множестве точек $(t, \alpha) \in [a, \infty) \times E$.

Пусть выполнены условия (**признак Абеля**):

- 1)' функция $f : [a, \infty) \times E \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена и монотонно убывает по x при каждом фиксированном $\alpha \in E$;
- 2)' интеграл $\int_a^{\infty} g(x, \alpha) dx$ сходится равномерно относительно $\alpha \in E$.

Тогда интеграл, зависящий от параметра, (1.12) сходится равномерно относительно $\alpha \in E$.

Для того чтобы НИЗОП (1.8) сходилсЯ равномерно относительно $\alpha \in E$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое число $\delta \in (a, +\infty)$, что для любых $\xi', \xi'' \geq \delta$ и всех $\alpha \in E$ выполняется неравенство (**критерий Коши**)

$$\left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x, \alpha) dx \right| < \varepsilon.$$

Решение типовых задач

22. Найти область сходимости интеграла $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$.

Решение. Представим интеграл в виде

$$I(\alpha) = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = I_1(\alpha) + I_2(\alpha).$$

Рассмотрим $I_1(\alpha)$ при $x \rightarrow 0$. Поскольку $f(x, \alpha) = x^{\alpha-1}e^{-x} \sim \frac{1}{x^{1-\alpha}}$, то по признаку сравнения интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\alpha}}$ сходится, если $1 - \alpha < 1$. Следовательно, интеграл $I_1(\alpha)$ сходится, если $\alpha > 0$.

Рассмотрим $I_2(\alpha)$ при $x \rightarrow +\infty$. Поскольку для любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{e^x} : \frac{1}{e^{x/2}} = 0 \quad \text{и} \quad \int_1^{+\infty} e^{-x/2} dx = \frac{2}{\sqrt{e}},$$

то интеграл $I_2(\alpha)$ сходится для любого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Таким образом, интеграл $I(\alpha)$ сходится для $\alpha > 0$.

23. Доказать, что интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$:

- 1) сходится равномерно на множестве $E = [b, +\infty)$, где $b > 0$;
- 2) сходится неравномерно на множестве $E_1 = (0, +\infty)$.

Решение. Сходимость данного интеграла для всех значений параметра $\alpha \in (0, +\infty)$ легко проверяется по определению.

1) Воспользуемся определением равномерной сходимости (1.9). Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ такое, что для всех $\alpha \geq b$ и всех $\xi \geq \delta$ выполняется

$$\left| \int_{\xi}^{+\infty} e^{-\alpha x} dx \right| = \left| \frac{e^{-\alpha \xi}}{\alpha} \right| \leq \left| \frac{e^{-b \xi}}{b} \right| < \varepsilon.$$

Решая это неравенство, получим, что $\xi > \frac{1}{b} \ln \frac{1}{\varepsilon b}$. Тогда, полагая $\delta = \max \left\{ 1, \frac{1}{b} \ln \frac{1}{\varepsilon b} \right\}$, имеем выполнение условия (1.9) равномерной сходимости интеграла для любого $\alpha \in E$.

2) Для произвольного числа $\delta > 0$ выберем $\xi = 1 + \delta$, $\alpha = \frac{1}{1 + \delta}$.

Тогда

$$\left| \int_{\xi}^{+\infty} e^{-x\alpha} dx \right| = \left| \frac{e^{-\xi\alpha}}{\alpha} \right| = (1 + \delta) \frac{1}{e} \geq \frac{1}{e},$$

т. е. неравенство (1.10) выполняется при $\varepsilon = \frac{1}{e}$. Следовательно, интеграл сходится неравномерно на множестве $(0, +\infty)$.

24. Доказать, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha > 1$, сходится неравномерно на множестве $E = (1, +\infty)$.

Решение. Сходимость данного интеграла при указанных значениях параметра хорошо известна. Покажем, что не выполняется условие общего критерия равномерной сходимости (1.11). Действительно,

$$\sup_{\alpha \in E} \int_{\xi}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \sup_{\alpha > 1} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_{\xi}^{+\infty} = \sup_{\alpha > 1} \frac{\xi^{1-\alpha}}{\alpha-1} = \lim_{\alpha \rightarrow 1+0} \frac{\xi^{1-\alpha}}{\alpha-1} = +\infty.$$

Таким образом, интеграл, сходящийся при каждом $\alpha > 1$, сходится неравномерно на множестве $E = (1, +\infty)$.

25. Доказать равномерную сходимость интеграла $I(\alpha)$ на множестве E , если:

- 1) $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{1+x^2} dx$, $E = \mathbb{R}$;
- 2) $I(\alpha) = \int_3^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^{5/4}} dx$, $E = [0, 2]$.

Решение. 1) Поскольку $\left| \frac{\sin \alpha x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ и

интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса данный интеграл сходится равномерно на множестве $\mathbb{R}$.

2) Если $\alpha \in [0, 2]$, $x \in [3, +\infty)$, то $0 \leq \ln^\alpha x \leq \ln^2 x$, поэтому справедливо неравенство

$$0 \leq \frac{\ln^\alpha x}{x^{5/4}} \leq \frac{\ln^2 x}{x^{5/4}}.$$

Из сходимости интеграла $\int_3^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^{5/4}} dx$ следует по признаку Вейерштрасса равномерная сходимость данного интеграла на E .

26. Доказать, что интеграл $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$ сходится равномерно по α на множестве $E = [b, +\infty)$, где $b > 0$.

Решение. Пусть $G(t, \alpha) = \int_0^t \sin \alpha x dx$. Тогда

$$|G(t, \alpha)| = \left| \frac{\cos \alpha t - 1}{\alpha} \right| \leq \frac{2}{b}$$

для всех $t \in [0, +\infty)$ и для всех $\alpha \geq b$. Кроме того, $1/x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$, причем функция $f(x) = 1/x$ монотонна и не зависит от α . По признаку Дирихле данный интеграл сходится равномерно по α на множестве $[b, +\infty)$, где $b > 0$.

27. Доказать, что интеграл $I(\alpha)$ сходится неравномерно на множестве E , если:

- 1) $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx$, $E = (0, +\infty)$;
- 2) $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$, $E = [0, 1]$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Интегралы, зависящие от параметра . . .	5
1.1. Собственные интегралы, зависящие от параметра . . .	5
1.2. Равномерная сходимость НИЗОП	14
1.3. Свойства НИЗОП. Вычисление	23
1.4. Эйлеровы интегралы	35
Глава 2. Интеграл Римана в $\mathbb{R}^d$	44
2.1. Мера Жордана	44
2.2. Сведение двойного интеграла к повторному	46
2.3. Замена переменных в двойном интеграле	65
2.4. Площади плоских множеств	78
2.5. Объемы и площади поверхностей	87
2.6. Тройной интеграл	93
2.7. Многократные интегралы	113
Глава 3. Криволинейные интегралы	123
3.1. Функции ограниченной вариации и интеграл Стилтьеса	123
3.2. Криволинейные интегралы первого рода	138

3.3. Криволинейные интегралы второго рода	152
3.4. Формула Грина	162
Глава 4. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ	178
4.1. Поверхностные интегралы первого рода	178
4.2. Поверхностные интегралы второго рода	190
4.3. Формулы Стокса и Гаусса – Остроградского	202
4.4. Элементы теории поля	219
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	232
УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ	234
ЛИТЕРАТУРА	235

Математический анализ. Задачи и упражнения: учеб-
М34 ное пособие. В 3 частях. Часть 3 / С. А. Бондарев [и др.]. —
Минск: Адукацыя і выхаванне, 2025. — 238 с.

ISBN 978-985-599-989-9 (ч. 3).

ISBN 978-985-06-3484-9.

Излагается материал для практических и лабораторных занятий по дисциплине «Математический анализ», изучаемой на математических специальностях учреждений высшего образования Республики Беларусь. Приводятся также краткие теоретические сведения по математическому анализу, необходимые для решения задач. В части 3 пособия рассмотрены темы «Интегралы, зависящие от параметра», «Интеграл Римана в $\mathbb{R}^d$ », «Криволинейные интегралы», «Поверхностные интегралы и теория поля».

Для студентов учреждений высшего образования по математическим специальностям.

УДК 517(075.8)

ББК 22.0.161я73

Учебное издание

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.
ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ**

Учебное пособие

В трех частях

Часть 3

Бондарев Сергей Александрович

Громак Елена Валерьевна

Кротов Вениамин Григорьевич

Мардвилко Татьяна Сергеевна

Стриленко Артем Дмитриевич

Редактор *Т. К. Хваль*

Художественный редактор *С. Д. Чирков*

Компьютерная верстка *А. Д. Стриленко*

Корректор *Т. К. Хваль*

Подписано в печать 27.01.2025. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 13,95. Уч.-изд. л. 12,0. Тираж 200 экз.

Заказ .

Республиканское унитарное предприятие

«Издательство "Адукацыя і выхаванне"».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/19 от 02.08.2013.

Ул. Будённого, 21, 220070, г. Минск.

Республиканское унитарное предприятие «Издательский центр
Белорусского государственного университета». Свидетельство о
государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 2/63 от 19.03.2014.

Ул. Красноармейская, 6, 220030, г. Минск.