

Л. А. Альсевич С. Г. Красовский Н. Я. Радыно

Математический анализ

Функции нескольких переменных
Интегралы

Практикум

*Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия
для студентов учреждений высшего образования
по математическим, физическим
и экономическим специальностям*



Минск
«Адукацыя і выхаванне»
2025

УДК 517(075.8)

ББК 22.161я73

А57

Рецензенты: кафедра математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» (заведующий кафедрой — доктор физико-математических наук, профессор *А. А. Гринь*, рецензент — доктор физико-математических наук, профессор *И. П. Мартынов*); профессор кафедры высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет» доктор физико-математических наук, профессор *А. И. Астровский*

Альсевич, Л.А.

А57 Математический анализ : функции нескольких переменных. Интегралы : практикум : учебное пособие / Л. А. Альсевич, С. Г. Красовский, Н. Я. Радыно. – Минск : Адукацыя і выхаванне, 2025. – 407 с. : ил.

ISBN 978-985-599-990-5.

Содержатся основные теоретические сведения о функциях нескольких переменных, их непрерывности, дифференцируемости; кратных, криволинейных и поверхностных интегралах. В приложениях приведены эйлеровы интегралы (бета- и гамма-функции), а также подробно изложена тема «Замена переменных в дифференциальных выражениях».

Предложены основные приемы решения типовых задач, которые иллюстрируются подробно разобранными примерами. Представлено большое количество упражнений для самоконтроля, снабженных ответами. Приведены задачи для индивидуальных и контрольных заданий.

Для студентов учреждений высшего образования по математическим, физическим и экономическим специальностям. Может быть полезно преподавателям, аспирантам, магистрантам и студентам естественнонаучных специальностей, а также иностранным студентам, изучающим курс высшей математики. Возможно использование пособия при дистанционном обучении.

УДК 517(075.8)

ББК 22.161я73

ISBN 978-985-599-990-5

© Альсевич Л.А., Красовский С.Г., Радыно Н.Я., 2025

© Оформление. Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Адукацыя і выхаванне”», 2025

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.

$[a; b]$, $(a; b)$ — отрезок, интервал с концами a и b .

$|a; b|$ — промежуток с концами a и b (здесь может подразумеваться отрезок, интервал или один из полуинтервалов $[a; b)$ или $(a; b]$).

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — единичные векторы направляющих осей декартовой прямоугольной системы координат *Oxyz*.

$\forall$ — квантор всеобщности ($\forall x \in A$ — для всех x из множества A ; $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, — для любых действительных x , не равных нулю).

$\exists$ — квантор существования ($\exists y \in A$ — существует y , принадлежащее множеству A ; $\exists y$, $y > 1$, — найдется y , большее 1).

$\equiv$ — равно по определению (синоним $\stackrel{\text{def}}{=}$) или тождественно равно.

$:=$ — положим равным.

$=:$ — обозначим через.

$\Rightarrow$, $\Leftarrow$ — знаки логического следования.

$\Leftrightarrow$ — знак равносильности.

$\sum$, $\sum_k$ — сигма, знак суммирования: $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$; k — индекс суммирования. Значение суммы не зависит от того, какой буквой обозначают индекс суммирования:

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{s=1}^n a_s = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}.$$

$f : X \rightarrow Y$ — функция f , заданная на множестве X со значениями во множестве Y .

бмф — бесконечно малая функция.

$$|\cdot| — \text{модуль}; \quad |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

$\ln(x)$, $\ln x$ — натуральный логарифм; $\ln x = \log_e x$.

e — основание натурального логарифма, математическая константа, иррациональное и трансцендентное число. Приблизительно равно 2,71828.

дл. AB — длина отрезка AB или кривой AB .

пл. S — площадь поверхности S или плоской фигуры S .

об. T — объем тела T .

$\lim_{(x;y) \rightarrow (x_0;y_0)} f(x,y)$, $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$, $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x,y)$ — двойной пре-

дел функции двух переменных.

$\frac{\partial f}{\partial x}$, f'_x , $D_x f$ — частная производная функции f нескольких переменных по переменной x .

$\frac{\partial f}{\partial l}(M_0)$ — производная по направлению l в точке M_0 .

$\frac{dF}{d\vec{x}}$, $F'(x_1, \dots, x_n)$ — матрица Якоби отображения F .

$\int f(x) dx$ — неопределенный интеграл (совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на рассматриваемом числовом промежутке).

$\int_a^b f(x) dx$ — определенный интеграл Римана от функции f

по отрезку $[a; b]$, где число a — нижний, а b — верхний предел интегрирования.

$\iint_D f(x,y) dx dy$ — двойной интеграл (2И) от функции f по

множеству $D \subset \mathbb{R}^2$.

$\iiint_T f(x,y,z) dx dy dz$ — тройной интеграл (3И) от функции

f по множеству $T \subset \mathbb{R}^3$.

$\int_{AB} f(x, y) ds, \int_{AB} f(x, y, z) ds$ — криволинейный интеграл первого рода (КРИ-1) от функции f по пути AB .

$\int_{AB} P(x, y) dx, \int_{AB} Q(x, y) dy$ или $\int_{AB} R(x, y, z) dz$ — криволинейный интеграл второго рода (КРИ-2) от функции f по пути AB .

$\oint_l f(x, y) ds$ или $\oint_l P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ — криволинейный интеграл первого или второго рода соответственно по замкнутому контуру l .

$\iint_S f(x, y, z) dS$ — поверхностный интеграл первого рода (ПОВИ-1) от функции f по поверхности S .

$\iint_S P(x, y, z) dy dz, \iint_S Q(x, y, z) dx dz, \iint_S R(x, y, z) dx dy$ — поверхностный интеграл второго рода (ПОВИ-2) от функции f по поверхности S .

$= [\dots] =$ — прерывание математических вычислений, в скобках указываются логические пояснения, формулы или свойства, используемые для дальнейших действий.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В пособии рассматриваются классические понятия математического анализа: функции нескольких переменных, их непрерывность, дифференцируемость; кратные, криволинейные и поверхностные интегралы.

Данное учебное пособие по структуре построено так же, как и учебное пособие Альсевич Л.А., Красовский С.Г. «Математический анализ. Последовательности, функции, интегралы. Практикум» (Минск: Вышэйшая школа, 2021). Цель пособия — помочь студентам в освоении указанных понятий математического анализа, а главное — научить их использовать полученные знания при исследовании задач разного типа. Например, найти наибольшее и наименьшее значения функции, установить скорость изменения функции в заданном направлении и направление наибольшего изменения функции, вычислить поток векторного поля через заданную поверхность, циркуляцию векторного поля и др.

В пособии даются необходимые определения, приводятся теоретические положения, отмечаются основные свойства рассматриваемых объектов. Все это иллюстрируется подробным решением типовых задач и примеров. Для усвоения и закрепления пройденного материала предлагается значительное количество упражнений, снабженных ответами, что даст возможность быстро составить любые варианты контрольных заданий с учетом специальности и уровня подготовки студентов.

В приложениях приведены эйлеровы интегралы (бета- и гамма-функции), использование которых упрощает и ускоряет вычисление некоторых интегралов, а также подробно изложена тема «Замена переменных в дифференциальных выражениях». Данное пособие написано исходя из личного опыта авторов проведения занятий по математическому анализу на факультете прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета.

Настоящее пособие будет весьма полезно иностранным студентам как при изучении математики, так и при изучении русского языка.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам — профессору А.И. Астровскому, профессору И.П. Мартынову и профессору А.А. Гриню за внимательное прочтение рукописи и ценные советы, позволившие улучшить пособие, а также сотрудникам кафедры высшей математики Белорусского государственного университета.

По написанию данного учебного пособия была проделана огромная предварительная работа авторами совместно с доцентами Нилом Федоровичем Наумовичем и Адольфом Федоровичем Наумовичем, безвременно ушедшими из жизни. Авторы выражают им особую признательность.

Авторы

ГЛАВА 1. ФУНКЦИЯ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

1.1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В $\mathbb{R}^2$

Рассмотрим множество $\mathbb{R}^2$ упорядоченных пар $(x; y)$ действительных чисел. Элементы множества $\mathbb{R}^2$ называются *точками* плоскости Oxy .

Расстояние между точками $M_1 = (x_1; y_1)$ и $M_2 = (x_2; y_2)$ из $\mathbb{R}^2$ определяется по формуле

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Если каждому натуральному числу (номеру) n поставлен в соответствие некоторый элемент $M_n \in \mathbb{R}^2$, $M_n = (x_n; y_n)$, то говорят, что в $\mathbb{R}^2$ задана *последовательность* $M_1 = (x_1; y_1)$, $M_2 = (x_2; y_2)$, $\dots$, $M_n = (x_n; y_n)$, $\dots$.

Последовательность (M_n) называется *сходящейся*, если существует точка $B(a; b)$ такая, что

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \nu(\varepsilon) > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad n \geq \nu(\varepsilon) \Rightarrow \rho(M_n, B) \leq \varepsilon,$$

где $\rho(M_n, B) = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2}$.

Точку $B(a; b)$ называют *пределом последовательности* (M_n) и пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = B$ или $M_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B$.

Геометрически запись $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = B$ означает, что какую бы ε -окрестность точки B ни взять, все члены последовательности, за исключением, быть может, конечного числа, попадут в эту ε -окрестность.

Точка M — *предельная* для множества $E \subset \mathbb{R}^2$ тогда и только тогда, когда существует последовательность (M_n) различных точек из E , сходящаяся к M . В любой окрестности предельной точки содержится, по крайней мере, одна точка данного множества, отличная от нее самой.

Теорема 1.1. Последовательность $(M_n) = ((x_n; y_n))$, $M_n \in \mathbb{R}^2$, сходится к точке $B(a; b) \in \mathbb{R}^2$ тогда и только тогда, когда числовые последовательности x_n и y_n сходятся соответственно к числам a и b .

Пример 1.1. Найти предел последовательности $(M_n) = ((x_n; y_n))$, если

$$x_n = \frac{2n^3 - 3n + 2}{n^3 + 1}, \quad y_n = n(\sqrt{4n^2 + 1} - 2n).$$

Решение. Найдем отдельно $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 3n + 2}{n^3 + 1} = \\ &= \left[2n^3 - 3n + 2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2n^3, \quad n^3 + 1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^3 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3}{n^3} = 2, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{4n^2 + 1} - 2n) = \\ &= \left[\sqrt{4n^2 + 1} - 2n = \frac{4n^2 + 1 - 4n^2}{\sqrt{4n^2 + 1} + 2n} = \frac{1}{\sqrt{4n^2 + 1} + 2n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{4n} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1}{4n} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n; y_n) = (2; 1/4)$.

Отметим, что запись $M_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} B$ равносильна записи $(x_n; y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (a; b)$.

Пример 1.2. Найти предел последовательности

$$\left(\frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}; \frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{9}-1} \right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Решение.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \left[n+1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n, \quad \sqrt{n^2+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} = 1,$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{3} - 1}{\sqrt[n]{9} - 1} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \left[\sqrt[n]{9} - 1 = (\sqrt[n]{3})^2 - 1 = (\sqrt[n]{3} - 1)(\sqrt[n]{3} + 1) \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{3} - 1}{(\sqrt[n]{3} - 1)(\sqrt[n]{3} + 1)} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n; y_n) = (1; 1/2)$.

1.2. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ. МНОЖЕСТВО ЗАДАНИЯ

Функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^2$, называется *функцией двух переменных* (Ф2П) и обозначается $z = f(x, y)$ или $z = f(M)$.

Множество $E \subset \mathbb{R}^2$ называется *множеством задания* функции. *Графиком* функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек пространства $Oxyz$ с координатами $(x, y, f(x, y))$, $(x, y) \in E$, т. е.

$$\Gamma_f = \{(x, y, z) : (x, y) \in E, \quad z = f(x, y)\}.$$

Отметим, что функция двух переменных $z = f(x, y)$ может быть задана соотношением $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, f(x, y)) \equiv \equiv 0$. В этом случае говорят, что функция $z = f(x, y)$ задана *неявно*.

Пример 1.3. Найти множество задания функции

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Решение. Поскольку неравенство $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ равносильно неравенству $x^2 + y^2 \leq 4$, то множеством задания функции является круг радиуса 2 с центром в точке $O(0; 0)$.

Пример 1.4. Определить и изобразить множество задания функции

$$z = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

Решение. Так как в данном случае $4 - x^2 - y^2 > 0$, т. е. $x^2 + y^2 < 4$, то множеством задания функции является круг радиуса 2 с центром в точке $O(0; 0)$ без границы (рис. 1.1).

Пример 1.5. Определить и изобразить множество задания функции

$$z = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{xy}.$$

Решение. Слагаемое $\arcsin \frac{x}{2}$ определено при $|x/2| \leq 1$, т.е. $-2 \leq x \leq 2$, второе слагаемое определено при $xy \geq 0$, т.е.

$$\text{а) } \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \text{б) } \begin{cases} x \leq 0, \\ y \leq 0 \end{cases}$$

(рис. 1.2).

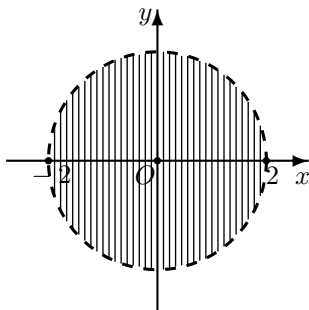


Рис. 1.1

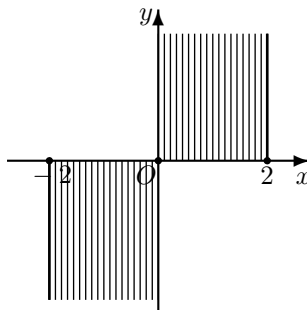


Рис. 1.2

1.3. ГРАФИК ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

В трехмерном пространстве $Oxyz$ график Γ_f представляет собой некоторое множество точек (очень часто — это поверхность). Рассмотрим некоторые функции двух переменных, графики которых задают поверхности.

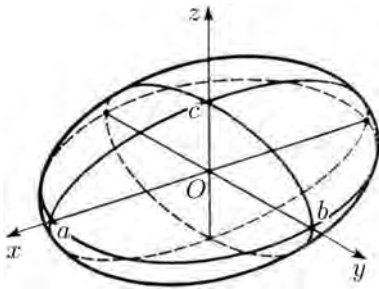
1. Соотношение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0,$$

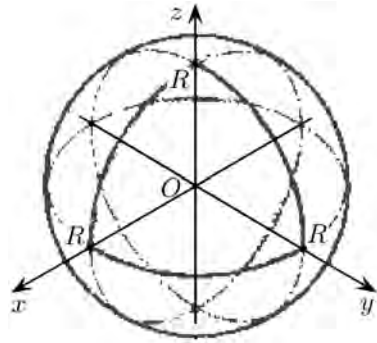
в пространстве $Oxyz$ определяет поверхность, которая называется *эллипсоидом*, где график функции $z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ соответствует части поверхности эллипсоида, расположенной в полу-

пространстве $z \geq 0$, а график функции $z = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ — части поверхности эллипсоида, расположенной в полупространстве $z \leq 0$ (рис. 1.3).

2. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ — это уравнение *сферы* радиуса R , где графики функций $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ и $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ соответствуют верхней и нижней полусферам соответственно (рис. 1.4).



Р и с. 1.3



Р и с. 1.4

3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, — *двуполостный гиперболоид*. График функции

$$z = c\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

отвечает верхней части, а график функции

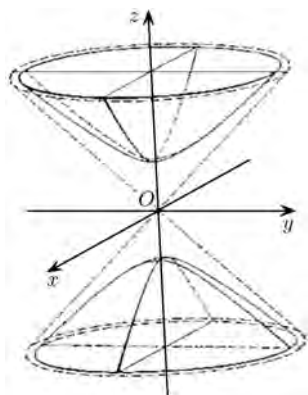
$$z = -c\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

нижней части этой поверхности (рис. 1.5).

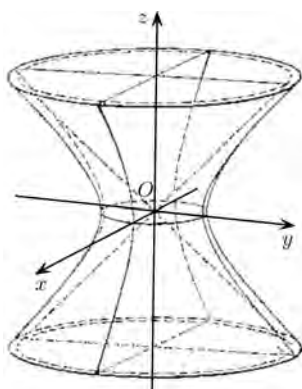
4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, — *однополостный гиперболоид*. Графики функций

$$z = c\sqrt{-1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \quad \text{и} \quad z = -c\sqrt{-1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

определяют верхнюю и нижнюю части поверхности относительно плоскости $z = 0$ (рис. 1.6).



Р и с. 1.5

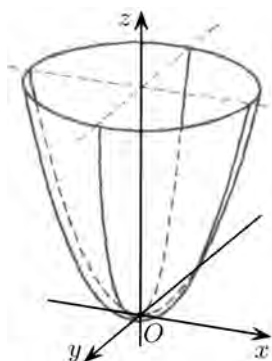


Р и с. 1.6

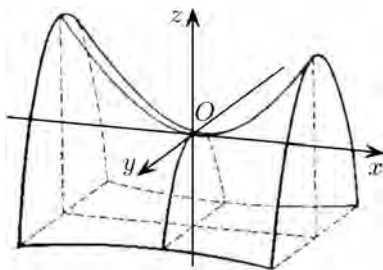
5. График функции $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, — *эллиптический параболоид* (рис. 1.7).

6. График функции $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, — *гиперболический параболоид* (рис. 1.8).

Отметим, что график функции $z = xy$ — также гиперболический параболоид.



Р и с. 1.7



Р и с. 1.8

ОГЛАВЛЕНИЕ

Основные обозначения.....	3
Предисловие.....	6
Глава 1. Функция двух переменных.....	8
1.1. Последовательности в $\mathbb{R}^2$	8
1.2. Понятие функции двух переменных. Множество задания.....	10
1.3. График функции двух переменных.....	11
1.4. Предел функции двух переменных	15
<i>Задачи для индивидуальных и контрольных заданий</i>	<i>25</i>
Глава 2. Непрерывность функции двух переменных.....	29
2.1. Непрерывность функции двух переменных в точке	29
2.2. Сложная функция двух переменных	30
2.3. Свойства непрерывных функций двух переменных	31
<i>Задачи для индивидуальных и контрольных заданий</i>	<i>36</i>
Глава 3. Дифференцируемые функции двух переменных ..	39
3.1. Дифференциал и частные производные функции двух переменных.....	39
3.2. Дифференцируемость сложной функции.....	50
<i>Задачи для индивидуальных и контрольных заданий</i>	<i>54</i>
Глава 4. Производные высших порядков	57
4.1. Частные производные высших порядков функции двух переменных.....	57
4.2. Дифференциалы высших порядков функции двух переменных.....	61
4.3. Формула Тейлора для функции двух переменных.....	65
4.4. Неявная функция.....	69
<i>Задачи для индивидуальных и контрольных заданий</i>	<i>74</i>
Глава 5. Скалярная функция векторного аргумента.....	76
5.1. Непрерывность и дифференцируемость функции трех переменных.....	76
5.2. Неявная функция.....	80

5.3. Производные и дифференциалы высших порядков функции трех переменных	82
5.4. Формула Тейлора для функции трех переменных	87
<i>Задачи для индивидуальных и контрольных заданий</i>	90
Глава 6. Приложения функций нескольких переменных ...	92
6.1. Производная функций по направлению. Градиент	92
6.2. Геометрические приложения ФНП	95
<i>Задачи для индивидуальных и контрольных заданий</i>	99
Глава 7. Экстремум функции нескольких переменных ...	101
7.1. Локальный экстремум явно заданных ФНП	101
7.1.1. Необходимое условие локального экстремума ФНП ...	101
7.1.2. Достаточное условие локального экстремума ФНП ...	105
7.1.3. Достаточное условие отсутствия локального экстремума ФНП	106
7.2. Локальный экстремум ФНП, заданной неявно	114
7.3. Условный экстремум ФНП	116
7.4. Глобальный экстремум ФНП	126
<i>Задачи для индивидуальных и контрольных заданий</i>	129
Глава 8. Векторная функция	141
8.1. Непрерывная векторная функция	141
8.2. Дифференцируемая векторная функция	144
8.3. Матрица Якоби сложной векторной функции	148
<i>Задачи для индивидуальных и контрольных заданий</i>	149
Глава 9. Двойной интеграл	152
9.1. Квадрируемые фигуры	152
9.2. Классы интегрируемых функций	153
9.3. Основные свойства двойного интеграла	154
9.4. Вычисление двойного интеграла. Сведение двойного интеграла к повторным интегралам	155
9.5. Замена переменных в двойном интеграле	165

9.6. Геометрические приложения двойного интеграла	174
9.6.1. Площадь плоской фигуры	174
9.6.2. Объем цилиндрикоида	180
9.6.3. Площадь поверхности	186
9.7. Механические приложения двойного интеграла	188
9.7.1. Масса плоской фигуры	188
9.7.2. Статические моменты плоской фигуры относительно координатных осей	188
9.7.3. Центр масс плоской фигуры	189
9.7.4. Моменты инерции плоской фигуры	189
<i>Задачи для индивидуальных и контрольных заданий</i>	195
Глава 10. Тройной интеграл	204
10.1. Кубируемые фигуры	204
10.2. Классы интегрируемых функций	205
10.3. Основные свойства тройного интеграла	205
10.4. Вычисление тройного интеграла	207
10.5. Замена переменных в тройном интеграле	212
10.6. Частные случаи замены переменных в тройном интеграле	215
10.6.1. Цилиндрическая система координат	215
10.6.2. Сферическая система координат	217
10.7. Вычисление объемов с помощью тройных интегралов	221
10.8. Механические приложения тройных интегралов	228
10.8.1. Масса тела	228
10.8.2. Статические моменты тела относительно координатных плоскостей	229
10.8.3. Центр масс тела	229
10.8.4. Моменты инерции тела	229
<i>Задачи для индивидуальных и контрольных заданий</i>	237
Глава 11. Криволинейные интегралы в $\mathbb{R}^2$	240
11.1. Криволинейный интеграл первого рода	240
11.1.1. Определение и вычисление КРИ-1	241
11.1.2. Механические приложения КРИ-1	242
11.2. Криволинейный интеграл второго рода	249

11.2.1. Определение и вычисление КРИ-2	249
11.2.2. Физический смысл КРИ-2	253
11.3. Формула Грина	254
11.4. Полный дифференциал и первообразная	259
<i>Задачи для индивидуальных и контрольных заданий</i>	267
Глава 12. Поверхностные интегралы	273
12.1. Поверхности	273
12.2. Криволинейные интегралы в пространстве $\mathbb{R}^3$	276
12.3. Касательная плоскость и нормальная прямая	279
12.4. Площадь поверхности	285
12.5. Поверхностный интеграл первого рода	290
12.6. Поверхностный интеграл второго рода	296
12.7. Формула Гаусса — Остроградского	306
12.8. Формула Стокса	311
12.9. Полный дифференциал и первообразная в $\mathbb{R}^3$	319
12.10. Элементы теории поля	327
<i>Задачи для индивидуальных и контрольных заданий</i>	336
Приложение А. Замена переменных в дифференциальных выражениях	350
А.1. Замена переменных в дифференциальных выражениях, содержащих обыкновенные производные	351
А.2. Замена переменных в дифференциальных выражениях, содержащих частные производные	361
<i>Задачи для индивидуальных и контрольных заданий</i>	386
Приложение Б. Эйлеровы интегралы	401
Рекомендуемая литература	403

Учебное издание

Альсевич Лариса Алексеевна
Красовский Сергей Геннадьевич
Радыно Николай Яковлевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Функции нескольких переменных Интегралы Практикум

Учебное пособие

Редактор *Л. Н. Макейчик*
Художественный редактор *А. Н. Ильичева*
Компьютерная верстка *С. Г. Красовского*
Корректор *Л. Н. Макейчик*

Подписано в печать 27.01.2025. Формат 60 × 84/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 23,72. Уч.-изд. л. 20,00. Тираж 200 экз. Заказ

Республиканское унитарное предприятие
«Издательство “Адукацыя і выхаванне”».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/19 от 02.08.2013.
Ул. Будённого, 21, 220070, Минск.

Республиканское унитарное предприятие
«Издательский центр Белорусского государственного университета».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 2/63 от 19.03.2014.
Ул. Красноармейская, 6, 220030, г. Минск.